L1MD – examen **10 juin 2014**

Sujet A

durée 2H ; tout document et matériel électronique interdit

1. On veut connaître la valeur de vérité de l'énoncé

$$(E) \qquad \big(Q \text{ et } (Q \Rightarrow P) \text{ et } (R \Rightarrow Q)\big) \Rightarrow (P \text{ ou } R)$$

en fonction des valeurs de vérité de P, Q, R (*i.e.* la table de vérité de (E)).

a. Expliquer le raisonnement suivant :

"Pour que (E) soit faux il faut que P et R soient faux."

b. Quelle est la table de vérité de (E) ?

c. On suppose maintenant que P, Q, R sont des énoncés dépendant d'une variable libre x de type $\mathcal{T}$. Peut on attribuer par une preuve une valeur de vérité à l'énoncé suivant ? Si oui laquelle ? Justifier.

$$\forall x : \mathcal{T}, \big(Q(x) \text{ et } (Q(x) \Rightarrow P(x)) \text{ et } (R(x) \Rightarrow Q(x))\big) \Rightarrow (P(x) \text{ ou } R(x))$$

2. Quelles sont les variables libres et les variables liées des énoncés suivants ? Quel type raisonnable peut on donner aux variables libres ? Expliquez votre choix.

a. $\exists y : \mathbb{R},\ \int_0^y f(x)dx > 0.$

b. $\exists p : \mathbb{N},\ \forall n : \mathbb{N},\ n \geq p \Rightarrow u_n \geq b.$

c. $\forall a : \mathbb{R},\ \lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{(a+1)n + n^2 + a}{2n^2+1} = \dfrac{1}{2}$

Comment se traduit en langage naturel, sans faire intervenir des variables liées, l'énoncé (b) ci-dessus ?

3. Les énoncés suivants sont ils bien formés (*i.e.* syntaxiquement corrects) ? Expliquer.

a. $\forall x : \mathbb{R},\ \exists x : \mathbb{R}, x^2 = x$

b. $\exists x : \mathbb{R},\ \int_0^x \sin(x)dx > 0$

c. $\big(\exists x : \mathbb{R}, \sin(x) > 0\big) \Rightarrow \big(\exists y : \mathbb{R}, \int_0^y \sin(x)dx > 0\big)$

4. Formaliser entièrement les énoncés suivants

a. La fonction $f : x \mapsto x^2 - 2x + 4$ ne s'annule pas sur $\mathbb{R}$.

b. La fonction sin est minorée sur $\mathbb{R}$.

c. L'équation $x^3 + x + 1 = 0$ admet une et une seule racine réelle.

5. Pour chacun des théorèmes écrits ci-dessous sous forme d'un séquent, indiquer les variables libres déclarées et les variables liées. Traduire ces théorèmes en langage naturel en faisant intervenir le moins de variables que possible. Quel théorème de votre cours d'analyse reconnaissez vous ?

a. $(u_n) : \mathbb{R}^{\mathbb{N}},\ \big(\forall n : \mathbb{N}, u_{n+1} \geq u_n\big),\ \big(\exists m : \mathbb{R}, \forall n : \mathbb{N}, u_n \leq m\big)\ \vdash\ \exists l : \mathbb{R},\ \lim\limits_{n\to+\infty} u_n = l$

b. $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ a, b : \mathbb{R},\ f$ est continue, $f(a) \leq 0,\ f(b) \geq 0\ \vdash\ \exists x : \mathbb{R}, x \in [a,b]$ et $f(x) = 0$

c. $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ a, b : \mathbb{R},\ f$ est dérivable, $\big(\forall x : \mathbb{R}, f'(x) > 0\big),\ a < b\ \vdash\ f(a) < f(b)$

6. Voici une preuve en calcul des séquents (écrite en deux parties pour respecter les contraintes de mise en page).

$$
\begin{array}{c}
\vdash\ \forall a : \mathbb{R}, \exists x : \mathbb{R}, (2-a)x^2 + 4x + a = 0 \\
\hline
a : \mathbb{R}\ \vdash\ \exists x : \mathbb{R}, (2-a)x^2 + 4x + a = 0 \\
\hline
\begin{array}{cc}
\begin{array}{c}
a : \mathbb{R}, a = 2\ \vdash\ \exists x : \mathbb{R}, (2-a)x^2 + 4x + a = 0 \\
\hline
a : \mathbb{R}, a = 2\ \vdash\ \exists x : \mathbb{R}, 4x + 2 = 0 \\
\hline
a : \mathbb{R}, a = 2\ \vdash\ 4(-\frac{1}{2}) + 2 = 0
\end{array}
&
\begin{array}{c}
a : \mathbb{R}, a \neq 2\ \vdash\ \exists x : \mathbb{R}, (2-a)x^2 + 4x + a = 0 \\
\\
\\
\end{array}
\end{array}
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{c}
a : \mathbb{R}, a \neq 2\ \vdash\ \exists x : \mathbb{R}, (2-a)x^2 + 4x + a = 0 \\
\hline
\begin{array}{cc}
\begin{array}{c}
a : \mathbb{R}, a \neq 2\ \vdash\ 16 - 4(2-a)a > 0 \\
\\
\end{array}
&
\begin{array}{c}
a : \mathbb{R}, a \neq 2, 16 - 4(2-a)a > 0\ \vdash\ \exists x : \mathbb{R}, (2-a)x^2 + 4x + a = 0 \\
\hline
\alpha, \beta, \gamma : \mathbb{R}, \alpha \neq 0, \beta^2 - 4\alpha\gamma > 0\ \vdash\ \exists x : \mathbb{R}, \alpha x^2 + \beta x + \gamma = 0
\end{array}
\end{array}
\end{array}
$$

Que prouve t-on ? Quel(s) résultat(s) supposé(s) acquis utilise t-on dans la preuve ? Quelle sont les idées de la preuve en langage naturel (*i.e.* quelles sont les différentes étapes) ? Quelles règles du calcul des séquents utilise t-on à chaque étape du calcul ? On rappelle ci-dessous quelques règles de façon non exhaustive et de façon plus ou moins détaillée.

$(mp)\ \dfrac{\Gamma\ \vdash\ A \quad \Gamma, A\ \vdash\ B}{\Gamma\ \vdash\ B}$, $(\vdash\ \text{et}\ )$, $(\Leftrightarrow\vdash)$, $(\exists\vdash)$, $(\vdash\Rightarrow)$, $(\ \vdash\ \forall)$, $(H)\ \dfrac{\Gamma, H\ \vdash\ B \quad \Gamma, \neg H\ \vdash\ B}{\Gamma\ \vdash\ B}$,

$(\vdash \exists[x := t])\ \dfrac{\Gamma\ \vdash\ P(t)}{\Gamma\ \vdash\ \exists x : \mathcal{T}, P(x)}$, $\quad (=)\ \dfrac{\Gamma, a = b, P(a)\ \vdash\ Q(a)}{\Gamma, a = b, P(b)\ \vdash\ Q(b)}$