

L1MD – TD 2 10 fev. 2014

Enoncés

Une * déclare une question comme délicate

1. Les énoncés suivants sont ils bien formés (*i.e.* syntaxiquement corrects) ?

$$\forall x \in \mathbb{R}, \sin(x) = x$$

$$\forall x \in \mathbb{R}, \exists x \in \mathbb{R}, x = x$$

$$\forall x \in \mathbb{R}, \int_0^x \sin(x) dx > 0$$

$$\forall x \in \mathbb{R}, \int_0^1 \sin(x) dx > 0$$

$$(\forall x \in \mathbb{R}, \int_0^x \sin(t) dt > 0) \text{ ou } (\exists y \in \mathbb{R}, \int_0^y \sin(x) dx > 0)$$

2. Quelles sont les variables libres, les variables liées et les constantes dans les expressions ou énoncés suivants :

$$\forall f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f \text{ est borné}$$

$$\exists M \in \mathbb{R}, \forall x \in \mathbb{R}, |f(x)| \leq M$$

$$\forall t \in \mathbb{R}, \sin(\pi - t) = \sin(t)$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n}{n+1} = 1$$

* $\ln(1+x) \sim x$ au voisinage de 0.

3. Donner la table de vérité des énoncés suivants suivant les valeurs de vérité de P, Q, R :

$$(P \Rightarrow Q) \Rightarrow (P \Leftrightarrow Q)$$

$$\left((P \Rightarrow Q) \Rightarrow R \right) \Rightarrow (\neg P \Rightarrow R)$$

Que disent ces énoncés ?

4. On apprend en cours d'analyse le théorème suivant :

“Si $(u_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ converge dans \mathbb{R} alors $u_{n+1} - u_n$ tend vers 0 quand n tend vers ∞ ”

Que déduit on de ce théorème pour la suite $(\ln(n))$:

- Que la suite $(\ln(n))$ converge dans \mathbb{R} .
- Que la suite $(\ln(n+1) - \ln(n))$ tend vers 0.
- Que la suite $(\ln(n+1) - \ln(n))$ ne tend vers 0.
- Que la suite $(\ln(n))$ ne converge pas dans \mathbb{R} .

5. E désigne l'ensemble $\{0, 2, 3, 4\}$. Pour $n \in \mathbb{N}$, $P(n)$ désigne l'énoncé “ n^2 est pair” et $Q(n)$ l'énoncé “ $n^2 + n$ est pair”. Quelle est la valeur de vérité des énoncés suivants ?

$$\forall n \in E, P(n)$$

$$\exists n \in E, P(n)$$

$$\exists n \in E, Q(n)$$

$$\forall n \in \mathbb{N}, Q(n)$$

6. Pour chacune des tables de vérité ci-dessous trouver un énoncé compatible aussi simple que possible, formé avec les variables P,Q,R (de type énoncé) et avec les connecteurs logiques habituels (non, et, ou, \Rightarrow , \Leftrightarrow). Reformuler ensuite l'énoncé avec les seuls connecteurs \neg (non) et \vee (ou).

P	Q	
V	V	F
V	F	V
F	V	V
F	F	V

P	Q	R	
V	V	V	V
V	V	F	V
V	F	V	F
V	F	F	V
F	V	V	V
F	V	F	F
F	F	V	V
F	F	F	V