

1. Réécrire (pour la logique classique) chacun des énoncés suivants avec chacune des listes d'opérations et quantificateurs indiquées (\neg signifie 'non') :

- P ou $\neg P$ avec (\neg , et) puis (\neg , \Rightarrow)
- $(\neg P \Rightarrow P) \Rightarrow P$ avec (\neg , et) puis (\neg , ou)
- $\exists x, P(x) \Rightarrow Q(x)$ avec (\forall , \neg , et)

2. Les énoncés suivants sont ils des tautologies ? Justifier par une argumentation aussi courte que possible (table de vérité, réécriture, distinguer suivant les valeurs d'une variable, etc.).

$$\begin{aligned}
 &P \text{ ou } \neg P, \quad (\neg P \Rightarrow P) \Rightarrow P, \quad (P \Rightarrow \neg P) \text{ ou } P, \quad ((P \Rightarrow Q) \text{ et } \neg Q) \Rightarrow \neg P \\
 &\neg(P \text{ ou } Q) \Leftrightarrow (\neg P \text{ ou } \neg Q), \quad \text{Faux} \Leftrightarrow (P \text{ et } \neg P), \quad \neg(P \text{ et } Q) \Leftrightarrow (\neg P \text{ ou } \neg Q) \\
 &((P \Rightarrow Q) \text{ et } (Q \Rightarrow R)) \Rightarrow (P \Rightarrow R)
 \end{aligned}$$

Que disent ces énoncés ?

3. Donner l'expression algébrique dans $(\mathbb{F}_2, +, \times)$ des énoncés du précédent exercice puis développer et simplifier. Retrouve-t-on que les énoncés sont des tautologies ou ne le sont pas ?

4. Quelle est la valeur de vérité de chacun des énoncés suivants ?

- $(\forall n \in \mathbb{Z}, \exists m \in \mathbb{Z}, n \geq m) \Leftrightarrow (\exists m \in \mathbb{Z}, \forall n \in \mathbb{Z}, n \geq m)$
- $(\forall n \in \mathbb{Z}, \exists m \in \mathbb{Z}, n^2 \geq m) \Leftrightarrow (\exists m \in \mathbb{Z}, \forall n \in \mathbb{Z}, n^2 \geq m)$

Les énoncés de part et d'autre de \Leftrightarrow disent ils la même chose ?

5. Qu'appelle-t-on la contraposée de $A \Rightarrow B$? Quelle est la négation de $A \Rightarrow B$?

Donner la contraposée des assertions suivantes :

- Je partirai en vacance si je réussis mon examen.
- Cette année je prendrai un abonnement à l'opéra à condition que la programmation me plaise et que le tarif soit raisonnable.
- Je partirai en vacances si je suis pris comme moniteur dans une colonie ou bien si Paul me propose de venir avec lui dans sa maison de campagne.

Quelle est parmi ce qui suit la négation logique de la première assertion ci-dessus ?

- Je ne partirai pas en vacance si je réussis mon examen.
- Il ne faut pas que je réussisse mon examen pour que je parte en vacance.
- Je réussirai mon examen et je ne partirai pas en vacance.

6. Formaliser les énoncés qui suivent avec les constructions, opérations, relations et constantes de la liste

$$\forall, \exists, \text{ et, ou, non, } \Rightarrow, \Leftrightarrow, =, \neq, \in, \leq, \geq, <, >, \mathbb{Z}, \mathbb{R}, 0$$

- Tout nombre réel admet une unique partie entière.

- b. Le produit de deux nombres réels est négatifs si et seulement si les nombres sont de signe opposé.
- c. L'ensemble E est un intervalle de \mathbb{R} .
- d. L'intersection de deux intervalles est un intervalle.

7. Donner une condition nécessaire mais non suffisante puis une condition suffisante mais non nécessaire pour qu'un entier naturel soit divisible par 12.