L1MD – feuille 4 **3 mars 2014**

1. *Construction d'ensembles*

On rappelle ici brièvement quatre des règles classiques de formation des ensembles (voir cours) :

1. $\{a, b\}$: paire a, b,
2. $\cup X$: réunion des éléments de X,
3. $\mathcal{P}(X)$ ensemble des parties de X,
4. $\{x \in X | P(x)\}$: ensemble des éléments de X vérifiant la propriété P.

Lesquelles de ces règles utilise t-on pour former les ensembles suivant ? (Détailler.)

a. $\{a, b, c, d\}$, $\{\{\{a\}\}, \{a, b\}, a, b, c\}$ pour a, b, c, d des objets (des ensembles dans la théorie des ensembles).

b. $A \cup B$, $A \cup B \cup C$ pour A, B, C des ensembles.

c. $\cup_{i \in I} X_i$ pour $(X_i)_{i \in I}$ une famille d'ensembles indexée par l'ensemble I.

d. $A \cap B$, $A \setminus B$ (complémentaire de B dans A) pour A, B deux ensembles.

e. $\cap_{i \in I} X_i$ pour $(X_i)_{i \in I}$ une famille d'ensembles.

f. $f(A)$ ou $\mathrm{Im}(f)$, $f^{-1}(C)$ pour $f : A \to B$ une fonction et C une partie de B.

2. Formaliser puis donner la négation de l'énoncé formalisé avec les notations (ou type) indiqués pour certains objets et les résumés indiqués pour certains énoncés :

a. "L'image d'un intervalle par une fonction continue $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est un intervalle" avec le type $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ pour les fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ et les résumés "f est continue" pour $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ et "E est un intervalle" pour E une partie de $\mathbb{R}$.

b. "Toute suite croissante et majorée de nombres réels est convergente" avec $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ pour le type (ou ensemble) "suite de nombre réel" et le résumé "(u_n) est convergente" pour (u_n) une suite de nombres réels.

c. "(u_n) est une suite convergente" pour (u_n) une suite de nombre réel avec la notation (ou résumé) $[a, b]$ pour le segment de $\mathbb{R}$ de bornes a et b.

d. "Toute suite à valeur dans I admet une sous-suite convergente dans I" pour I un intervalle de $\mathbb{R}$, avec $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ comme notation pour l'ensemble des suites numériques et le résumé "(u_n) converge vers l" pour (u_n) une suite de nombres réelsn et l un nombre réel.

3. Que disent les énoncés suivants dans le contexte spécifié ? Connaissez vous la valeur de vérité de ces énoncés ?

a. "$\forall a, b \in \mathbb{R},\ a < b \Rightarrow a^2 < b^2$".

b. "$\exists y \in E,\ \forall x \in E,\ y \geq x$" où E est une partie de $\mathbb{R}$.

c. "$\forall x \in E,\ \exists y \in E,\ y > x$" où E est une partie de $\mathbb{R}$.

d. "$\exists y \in E,\ \forall x \in E,\ y > x$" où E est une partie de $\mathbb{R}$.

e. "$\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} \leq u_n$" où (u_n) est une suite numérique.

f. "$\forall n \in \mathbb{N},\ \exists m \in \mathbb{N},\ m > n$ et $u_m > u_n$" où (u_n) est une suite de nombres compris entre 0 et 1.

g. "$\forall n \in \mathbb{N},\ \exists p, q \in \mathbb{N},\ q > p > n$ et $u_q > u_p$" où (u_n) est une suite de nombres compris entre 0 et 1.

h. "$\forall n \in \mathbb{N},\ \exists m \in \mathbb{N},\ m \geq n$ et $u_m \leq u_n$" où (u_n) est une suite de nombres compris entre 0 et 1.