L1MD – feuille 5 **31 mars 2014**

Les entiers

1. On rappelle le principe de démonstration par récurrence : si $P(n)$ est un énoncé portant sur les entiers $n \in \mathbb{N}$ on a

$$\Big(P(0) \text{ et } \big(\forall n \in \mathbb{N}, P(n) \Rightarrow P(n+1)\big)\Big) \Rightarrow \big(\forall n \in \mathbb{N},\ P(n)\big)$$

Soit S une partie de $\mathbb{N}$ contenant un entier un entier $\leq n$ pour un $n \in \mathbb{N}$. Montrer (en langage naturel) par récurrence sur n que S admet un plus petit élément.

Application : Les nombres réels on la propriété suivante : tout nombre réel est majoré par un entier. Montrer que tout nombre réel positif x admet une partie entière, c'est à dire un entier n tel que $n \leq x < n+1$. Comment peut on étendre ce résultat aux réels négatifs ?

2. On rappelle la construction d'une suite d'objets (x_n) (des nombres, des ensembles, des fonctions,…) par récurrence :

$$\Big(\forall n \in \mathbb{N}, \forall x, \exists y, P(n,x,y)\Big) \Rightarrow \Big(\forall x, \exists (x_n),\ \big(x_0 = x \text{ et } \big(\forall n \in \mathbb{N},\ P(n, x_n, x_n+1)\big)\big)\Big)$$

où P est un énoncé (ou une propriété).

Soit $a < b$ deux nombres réels et (u_n) une suite de réels à valeurs dans le segment $[a,b]$. Construire deux suites (a_n) et (b_n) de nombres de $[a,b]$ vérifiant : (a_n) est croissante, (b_n) est décroissante, $a_n < b_n$, $b_n - a_n = \frac{b-a}{2^n}$ et $\{k \in \mathbb{N}, u_k \in [a_n, b_n]\}$ est infini.

Comment définit on une suite extraite (ou sous-suite) de (u_n) ? Montrer l'existence d'une suite extraite de (u_n) admettant une limite dans $[a,b]$.

Gestion des variables liées

3. Pour chacun des énoncés ci-dessous renommer les variables liées en évitant les variables libres de l'énoncé et la liste de variables indiquée.

a. $\big(\exists y \in E,\ \forall x \in E,\ y \geq x\big)$ évitant x

b. $\big(\forall n \in \mathbb{N},\ \exists p, q \in \mathbb{N},\ q > p > n \text{ et } u_q > u_p\big)$ évitant p, q

c. $\Big(\big(\forall x \in \mathbb{R},\ \int_0^x \sin(t)dt > 0\big) \text{ ou } \big(\exists y \in \mathbb{R},\ \int_0^y \sin(x)dx > 0\big)\Big)$ évitant x

d. $\lim_{n \to +\infty} \dfrac{n}{n+1} = 1$ évitant n

4. Expliciter un calcul des séquents permettant d'établir les règles suivantes. Sont elles réversibles ? Si oui expliciter un calcul établissant la règle inversée.

$$\frac{}{\vdash A \text{ ou } \neg A} \qquad \frac{}{A \text{ et } \neg A \vdash} \qquad \frac{\Gamma, \neg A \vdash B}{\Gamma \vdash A \text{ ou } B}$$

$$\text{(distinction suivant H)} \quad \frac{\Gamma, H \vdash B \qquad \Gamma, \neg H \vdash B}{\Gamma \vdash B}$$

$$\frac{\Gamma \vdash \exists x : \mathcal{T}, P(x)}{\Gamma, x_0 : \mathcal{T} \vdash P(x_0) \text{ ou } \big(\exists x : \mathcal{T}, P(x)\big)}$$

5. Prouver par un calcul des séquents

$$x_0 : \mathcal{T}, \big(\forall x : \mathcal{T}, P(x)\big) \vdash P(x_0)$$

$$x_0 : \mathcal{T} \vdash \big(P(x_0) \text{ ou } \exists x : \mathcal{T}, P(x)\big) \Leftrightarrow \big(\exists x : \mathcal{T}, P(x)\big)$$