L1MD – feuille 6 — 7 avril 2014

Les séquents

1. Les séquents suivant sont mal formés : certaines variables libres ne sont pas déclarées, certaines variables liées ne sont pas typées. Corriger avec un type raisonnable pour ces variables en expliquant votre choix de type. Comment se traduisent ces séquents en langage naturel ?

a. $a > 0, b > 0 \ \vdash \ ab > 0$

b. $a, b :]0, +\infty[\ \vdash \ a < b \Rightarrow f(a) < f(b)$

c. $a < b, f \geq 0 \ \vdash \ \displaystyle\int_a^b f \geq 0$

d. $u_0 = \dfrac{1}{2}, \big(\forall n,\ u_{n+1} = \sqrt{u_n}\big) \ \vdash \ \lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 1$

e. $\vdash \ \det A \neq 0 \Rightarrow \Big(\big\{(x,y), A\left(\begin{smallmatrix}x\\ y\end{smallmatrix}\right) = \begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}\big\} \text{ est un singleton}\Big)$

2. Ecrire les contextes formalisés (ce qu'on mettrait à gauche du symbole $\vdash$ d'un séquent) correspondant aux situations suivantes

a. E est une partie de $\mathbb{R}$; M est un majorant de E.

b. E est une partie majorée de $\mathbb{R}$.

c. E est une partie de $\mathbb{R}$ admettant un plus petit élément.

d. E est une partie de $\mathbb{R}$; M est la borne supérieure de E.

e. E est une partie de $\mathbb{R}$ admettant une borne supérieure.

f. A est une matrice réelle carré inversible de taille n.

g. A est une matrice réelle de taille $m \times n$; X est un vecteur colonne vérifiant $AX = 0$.

3. Pour chacune des propositions suivantes écrire le séquent entièrement formalisé correspondant puis appliquer les règles réversibles jusqu'à obtenir un séquent plus clair.

a. Le produit de deux nombres positifs est positif.

b. Toute partie non vide majorée de $\mathbb{R}$ admet une borne supérieure

c. Le produit de deux suites convergentes de nombres réels est une suite convergente.

d. Toute fonction polynomiale $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est continue.

e. La composée de deux applications continues $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est continue.

f. Le produit de deux matrices carré inversibles de même taille est un matrice carré inversible.

4. On écrit

$$\begin{array}{c} \Gamma_1 \ \vdash \ B_1 \quad \Gamma_2 \ \vdash \ B_2 \quad \ldots \\ \vdots \\ \Gamma \ \vdash \ B \end{array}$$

pour dire que le séquent $\Gamma \ \vdash \ B$ se déduit des séquents $\Gamma_1 \ \vdash \ B_1 \quad \Gamma_2 \ \vdash \ B_2 \quad \ldots$ sans donner les séquents intermédiaires et les règles du calcul des séquents utilisées : c'est une esquisse de preuve. Si le séquent du bas résulte de l'application d'une seule règle, on écrira $\dfrac{\Gamma_1 \ \vdash \ B_1 \quad \Gamma_2 \ \vdash \ B_2 \quad \ldots}{\Gamma \ \vdash \ B}$

Ecrire sous cette forme les esquisses de preuve suivantes :

a. Soit (u_n) la suite définie par $u_0 = \frac{1}{2}$ et $u_{n+1} = \sqrt{u_n}$. On montre par récurrence sur n qu'on a $u_n < 1$.

b. Soient u, v, w trois vecteurs de $\mathbb{R}^2$. On distingue suivant les cas $u = 0$ et $u \neq 0$ pour montrer que u, v, w sont liés.

c. Soit (u_n) une suite croissante majorée de nombres réels. On utilise le fait que toute partie non vide majorée de $\mathbb{R}$ admet une borne supérieure pour montrer que (u_n) converge.

5. Soient a, b, c, d quatre ensembles. L'ensemble $\{a, b, c, d\}$ est déterminé par la propriété

$$\forall x : \mathcal{E}\text{ns}, \Big(x \in \{a, b, c, d\} \Leftrightarrow \big(x = a \text{ ou } x = b \text{ ou } x = c \text{ ou } x = d\big)\Big)$$

Ecrire une preuve en calcul des séquents de l'existence de cet ensemble à partir des axiomes suivants :

$(=)$ $\big[x, y : \mathcal{E}\text{ns}, x = y, P(x) \;\vdash\; P(y)\big]$ où $P(x)$ est un énoncé dépendant d'une variable libre x de type $\mathcal{E}$ns.

$(\in)$ $\big[A, B : \mathcal{E}\text{ns}, \big(\forall x : \mathcal{E}\text{ns},\ (x \in A \Leftrightarrow x \in B)\big) \;\vdash\; A = B\big]$. Le séquent $\big[A, B : \mathcal{E}\text{ns}, A = B \;\vdash\; \forall x,\ (x \in A \Leftrightarrow x \in B)\big]$ se déduit de la règle $(=)$.

$(\{a, b\})$ $\big[a, b : \mathcal{E}\text{ns} \;\vdash\; \exists X : \mathcal{E}\text{ns}, \forall x : \mathcal{E}\text{ns}, \big(x \in X \Leftrightarrow (x = a \text{ ou } x = b)\big)\big]$

$(\cup X)$ $\big[X : \mathcal{E}\text{ns} \;\vdash\; \exists Y : \mathcal{E}\text{ns}, \forall y : \mathcal{E}\text{ns}, \big(y \in Y \Leftrightarrow \big(\exists x : \mathcal{E}\text{ns}, (x \in X \text{ et } y \in x)\big)\big)\big]$