Lecture d'une preuve

On rappelle ci-dessous l'une des règles de construction d'une suite par récurrence :

$$(\vdash \exists(x_n)) \quad \frac{\Gamma, x : \mathcal{T}, P(x) \ \vdash \ \exists y : \mathcal{T}, (P(y) \text{ et } Q(x,y))}{\Gamma, x : \mathcal{T}, P(x) \ \vdash \ \exists(x_n) : \mathcal{T}^{\mathbb{N}}, x_0 = x \text{ et } \forall n : \mathbb{N}, (P(x_n) \text{ et } Q(x_n, x_{n+1}))}$$

Les deux calculs suivant présente une preuve ou une esquisse de preuve (esquisse parce que le passage de certains séquents à d'autres n'est pas détaillé ; on indique un tel passage par une double règle). En cours de calcul, on écrit — à gauche de $\vdash$ pour rappeler le contexte du séquent précédent sans le réécrire. Répondez pour chacun de ces calculs aux questions suivantes :

Les règles de cette preuve s'appliquent t-elles de haut en bas ou de bas en haut ? Pouvez vous nommer les règles en question ? Quel résultat prouve t-on ? Sur quels résultats non prouvés s'appuie la preuve ? Reconnaissez vous dans ces résultats non prouvés des théorèmes du cours ? Quelles sont les idées de la preuve ? Pouvez vous compléter les passages manquants ?

1.

$$\cfrac{\cfrac{x : \mathbb{R} \ \vdash \ \exists y : \mathbb{R}, y = \sin(x)}{x : \mathbb{R} \ \vdash \ \exists(u_n) : \mathbb{R}^{\mathbb{N}}, u_0 = x \text{ et } \forall n : \mathbb{N}, u_{n+1} = \sin(u_n)}}{\vdash \ \exists(u_n) : \mathbb{R}^{\mathbb{N}}, u_0 = 1 \text{ et } \forall n : \mathbb{N}, u_{n+1} = \sin(u_n)}$$

2.

$$\cfrac{\cfrac{\cfrac{\cfrac{\cfrac{\cfrac{f : [0,1] \to \mathbb{R},\ f \text{ est continue},\ f(0) \le 0, f(1) \ge 0 \ \vdash \ \exists x : [0,1],\ f(x) = 0}{\begin{array}{l} \exists(a_n),(b_n) : [0,1]^{\mathbb{N}}, \Big(a_0 = 0 \text{ et } b_0 = 1 \\ \text{et } \big(\forall n : \mathbb{N}, \big(a_n \le a_{n+1} \le b_{n+1} \le b_n \\ \text{et } f(a_n) \le 0 \text{ et } f(b_n) \ge 0\big)\big) \\ \text{et } \lim_{n\to+\infty} b_n - a_n = 0\Big) \end{array} \ \vdash \ \exists x : [0,1],\ f(x) = 0}}{\begin{array}{l} a_0 = 0 \text{ et } b_0 = 1 \\ \text{et } \big(\forall n : \mathbb{N}, \big(a_n \le a_{n+1} \le b_{n+1} \le b_n \\ \text{et } f(a_n) \le 0 \text{ et } f(b_n) \ge 0\big)\big) \\ \text{et } \lim_{n\to+\infty} b_n - a_n = 0 \end{array} \ \vdash \ \exists x : [0,1],\ f(x) = 0}}{\begin{array}{l} \exists(a_n),(b_n) : [0,1]^{\mathbb{N}}, \Big(a_0 = 0 \text{ et } b_0 = 1 \\ \text{et } \big(\forall n : \mathbb{N}, \big(a_n \le a_{n+1} \le b_{n+1} \le b_n \\ \text{et } f(a_n) \le 0 \text{ et } f(b_n) \ge 0\big)\big) \\ \text{et } \lim_{n\to+\infty} b_n - a_n = 0\Big) \end{array} \ \vdash \ \exists x : [0,1],\ f(x) = 0}}{\vdots}}{\begin{array}{l} a, b : [0,1], a \le b, \\ f(a) \le 0, f(b) \ge 0 \end{array} \ \vdash \ \exists c, d : [0,1], \ \begin{array}{l} \big(c = a \text{ et } d = a + \frac{1}{2}(b-a) \text{ et } f(d) \ge 0\big) \\ \text{ou } \big(d = b \text{ et } c = a + \frac{1}{2}(b-a) \text{ et } f(c) \le 0\big) \end{array}}}{\begin{array}{l} \exists l : [0,1], l = \lim(a_n) = \lim(b_n) \end{array}} \quad \cfrac{\cfrac{\cfrac{\cfrac{\cfrac{\