

Sujet A

durée 45mn ; tout document et matériel électronique interdit

1. Donner la table de vérité des énoncés suivants suivant les valeurs de vérité de P, Q, R , en détaillant les calculs (en détaillant la table) ou en argumentant.

$$(P \text{ et } Q) \Rightarrow (P \Leftrightarrow Q)$$

$$((P \Rightarrow Q) \text{ et } R) \Rightarrow (R \Rightarrow Q)$$

2. On note \overline{P} l'expression algébrique dans $(\mathbb{F}_2, +, \times)$ d'un énoncé P . On rappelle qu'on a $\overline{\neg P} = 1 + \overline{P}$ et $\overline{P \text{ et } Q} = \overline{P} \times \overline{Q}$.

Exprimer $\overline{P \Rightarrow Q}$ puis $\overline{((P \Rightarrow Q) \text{ et } \neg Q) \Rightarrow \neg P}$ comme fonctions polynomiales en \overline{P} et \overline{Q} . La seconde fonction dépend elle après simplification de \overline{P} et \overline{Q} ? Qu'en déduit on ?

3. Indiquer les constantes, les variables libres et les variables liées des énoncés suivants.

Quel est raisonnablement le type des variables libres (autrement dit dans quels ensembles prennent elles chacune leurs valeurs) ?

Que disent les énoncés ?

a. $\forall y \in \mathbb{R}, f(x) \leq f(y)$

b. $\exists p \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N}, n \geq p \Rightarrow u_{n+1} \geq u_n$

Donner les négations formelles des énoncés a et b.

4. Formaliser entièrement les énoncés suivants

a. L'équation $x^2 + x + 1 = 0$ n'a pas de solution dans \mathbb{R} .

b. Les applications $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ne sont pas toutes injectives.

c. La fonction \ln n'est pas majorée sur $]0, +\infty[$.

d. Les solutions complexes de l'équation $x^3 + x + 1 = 0$ sont conjuguées.