L1md – Un corrigé de l'examen du 21 juin 2013

1. *Nier "u finit croissante" autrement dit "* $\exists p : \mathbb{N}, \forall n : \mathbb{N},\ n \geq p \Rightarrow u_{n+1} \geq u_n$ *"* 2pt

$$\boxed{\forall p : \mathbb{N}, \exists n : \mathbb{N},\ n \geq p \text{ et } u_{n+1} < u_n}$$

2. *Formaliser "Pour que deux réels aient le même cube il faut qu'ils soient égaux"* 1pt

$$\boxed{\forall x : \mathbb{R}, \forall y : \mathbb{R},\ x^3 = y^3 \Rightarrow x = y}$$

3. *Que peut on dire d'une fonction qui vérifie* $\forall x : \mathbb{R}, \exists y : \mathbb{R},\ f(x) \leq f(y)$ *?* 2pt

$$\boxed{\text{Rien}}$$

Explication : Cet énoncé est vrai sans hypothèse sur f (prendre $y := x$) donc ne dit rien sur f.

4. *Formaliser "Pour que la valeur absolue d'une fonction soit bornée, il suffit que la fonction soit elle-même bornée"* 1pt pour la formalisation partielle ou complète

Formalisation partielle :

$$\boxed{\forall f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f \text{ est bornée } \Rightarrow |f| \text{ est bornée}}$$

Formalisation complète :

$$\boxed{\begin{array}{l} \forall f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ \big(\exists m : \mathbb{R}, \exists M : \mathbb{R}, \forall x : \mathbb{R},\ m \leq f(x) \leq M\big) \Rightarrow \\ \qquad\qquad\qquad \big(\exists m : \mathbb{R}, \exists M : \mathbb{R}, \forall x : \mathbb{R},\ m \leq |f(x)| \leq M\big) \end{array}}$$

5. *Quelles sont les variables libres dans* 2pt

$$\forall x : \mathbb{R},\ \forall y : \mathbb{R},\ x \in I \textit{ et } y \in I \Rightarrow f(x) \leq f(y) \quad ?$$

$$\boxed{I \text{ et } f}$$

Explication : les variables libres sont celles qui ne sont pas introduites par les quantificateurs $\forall, \exists$ et les constructions comme $\{x \in A, \ldots\}$ (l'ensemble des x de A vérifiant...) ou $\sum_{x \in A} \cdots$ (la somme, x décrivant A, de...), etc.

6. *Que dit l'énoncé* $\forall y : \mathbb{R},\ f(x) \leq f(y)$ 2pt

$$\boxed{f \text{ atteint son minimum en } x}$$

Explication : L'énoncé dit quelque chose sur ses variables libres f et x...

7. *Pour la preuve suivante, donner les valeurs successives du nombre d'hypothèses dans le but courant* 2pt

ForallB ImpB EtC ImpB EtB ImpC ImpB EtC ImpB Hyp ImpB EtC ForallC Hyp

$$\boxed{0\ 0\ 1\ 2\ 3\ 3\ 3\ 4\ 5\ 6\ 3\ 4\ 5\ 5\ 3}$$

Explication : Avant la première tactique le contexte est vide donc le nombre d'hypo thèses est 0. ForallB introduit une variable dans le contexte mais pas d'hypothèse. ImpB introduit une hypothèse dans le contexte : ce qui se trouvait à gauche de $\Rightarrow$. EtC casse une hypothèse du contexte en deux. EtB transforme le séquent courant en deux séquents sans changer le contexte ; lorsque le premier séquent est prouvé (ce qu'on reconnaît à la tactique Hyp) on passe au second séquent ce qui réinitialise le contexte à celui qu'on avait au moment d'appliquer EtB. ImpC transforme également le séquent courant en deux séquents ; il change le contexte des deux séquents mais pas le nombre d'hypothèses de chacun de ces séquents. Hyp réinitialise le contexte donc réinitialise le nombre d'hypothèses à sa valeur lors de l'application des tactiques EtB ou ImpC ou à 0 s'il termine la preuve du séquent initial. ForallC transforme une hypothèse qui commence par $\forall$ en une instance de cette hypothèse (pour une valeur particulière de la variable introduite par $\forall$).

8. *Prouver "L'intersection de deux parties majore les minorants communs à ces deux parties"* 3pt

Formalisation

$$\forall A : \mathcal{E}\text{ns}, \forall B : \mathcal{P}(A), \forall C : \mathcal{P}(A), \forall D : \mathcal{P}(A),\ D \subset B \text{ et } D \subset C \Rightarrow D \subset B \cap C$$

Réécriture de $D \subset B$: $\forall x : A,\ x \in D \Rightarrow x \in B$

Définition de $B \cap C$: $\forall x : A,\ x \in B \cap C \Leftrightarrow x \in B \text{ et } x \in C$ (Il y a une réécriture de $x \in B \cap C$ correspondante.)

Début de preuve (tactiques gratuites) et séquents obtenus

(ForallB)^4 ImpB EtC ReecrC($\subset$) ReecrC($\subset$) ReecrB($\subset$) ForallB($x \leftrightarrow x_0$) ImpB ReecrB($\cap$) EtB

$A : \mathcal{E}\text{ns},\ B : \mathcal{P}(A),\ C : \mathcal{P}(A),\ D : \mathcal{P}(A), \big(\forall x : A,\ x \in D \Rightarrow x \in B\big),\ \big(\forall x : A,\ x \in D \Rightarrow x \in C\big),\ x_0 : A,\ x_0 \in D \quad \vdash \quad x_0 \in B$

$A : \mathcal{E}\text{ns},\ B : \mathcal{P}(A),\ C : \mathcal{P}(A),\ D : \mathcal{P}(A), \forall x : A,\ x \in D \Rightarrow x \in B,\ \forall x : A,\ x \in D \Rightarrow x \in C,\ x_0 : A,\ x_0 \in D \quad \vdash \quad x_0 \in C$

Voici la preuve du premier séquent en suivant les conventions du cours pour ImpC ; la preuve du second séquent est analogue en remplaçant la variable C dans OubliC par B.

OubliC($\forall x : A,\ x \in D \Rightarrow x \in C$) ForallC($x := x_0$) ImpC Hyp Hyp

Explication : Voir les explications de la question 9. ForallC($x := x_0$) est une tactique non gratuite ; elle remplace l'hypothèse commençant par $\forall x$ par son instance (plus faible) pour $x = x_0$ (le témoin).

9. *Expliquer les quatre premières tactiques de votre preuve de "Pour qu'une fonction atteigne son maximum il faut qu'il en soit de même pour son triple"* 2pt

Formalisation complète :

$$\forall f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \big(\exists x : \mathbb{R}, \forall y : \mathbb{R}, f(y) \leq f(x)\big) \Rightarrow \big(\exists x \in \mathbb{R}, \forall y \in \mathbb{R}, 3f(y) \leq 3f(x)\big)$$

ForallB ImpB ExistC($x \leftrightarrow x_0$) ExistB($x := x_0$)

Explication : ForallB introduit la variable $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dans le contexte, ImpB introduit dans le contexte l'énoncé à gauche de $\Rightarrow$ comme hypothèse, ExistC transforme cette hypothèse en introduisant la variable x_0 (il y aurait conflit de notation si on introduisait la variable x) et remplaçant l'hypothèse par son instance pour ce x_0. ExistB est la première tactique non gratuite et prend un argument : elle remplace le but courant par le but plus fort obtenu en remplaçant la variable introduite par $\exists$ par l'argument donné (le "témoin", fonction des variables du contexte et des constantes mathématiques ; ici le témoin choisi est la variable x_0 du contexte).

10. *Donner le début gratuit avec les séquents de votre preuve de "Toute combinaison linéaire de 2 fonctions affines est affine"* 3pt

Formalisation partielle :

$\forall f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \forall g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \forall a : \mathbb{R}, \forall b : \mathbb{R},\ f$ est affine et g est affine $\Rightarrow$ af+bg est affine

Formalisation de "f est affine" : $\exists a : \mathbb{R}, \exists b : \mathbb{R}, \forall x : \mathbb{R}, f(x) = ax + b$

Début de preuve avec la formalisation partielle et séquent obtenu

(ForallB)^4 ImpB EtC

$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, a : \mathbb{R}, b : \mathbb{R}, f$ est affine, g est affine $\quad\vdash$ af+bg est affine

Réécritures avec gestion des conflits de notations

$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ g : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ a : \mathbb{R},\ b : \mathbb{R},\ \big(\exists c : \mathbb{R}, \exists d : \mathbb{R}, \forall x : \mathbb{R}, f(x) = cx + d\big), \big(\exists c : \mathbb{R}, \exists d : \mathbb{R}, \forall x : \mathbb{R}, g(x) = cx + d\big) \quad \vdash$ $\exists c : \mathbb{R}, \exists d : \mathbb{R}, \forall x : \mathbb{R},\ af(x) + bg(x) = cx + d$

Suite de la preuve et séquent obtenu avec gestion des conflits de notations

(ExistC)^4

$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ g : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ a : \mathbb{R},\ b : \mathbb{R},\ c_1 : \mathbb{R},\ d_1 : \mathbb{R},\ c_2 : \mathbb{R},\ d_2 : \mathbb{R},\ \big(\forall x : \mathbb{R}, f(x) = c_1x + d_1\big),\ \big(\forall x : \mathbb{R}, g(x) = c_2x + d_2\big) \quad \vdash$ $\exists c : \mathbb{R}, \exists d : \mathbb{R}, \forall x : \mathbb{R},\ af(x) + bg(x) = cx + d$

A ce point de la preuve il n'y a plus de tactique gratuite.

Conclusion : la suite des tactiques gratuites est : (On omet de mentionner les tactiques de réécriture)

ForallB ForallB ForallB ForallB ImpB EtC ExistC ExistC ExistC ExistC