L1MD – examen 6 mai 2015

Durée 2H ; tout document autre que celui distribué et tout matériel électronique interdit

$\neg P$ désigne la négation de P. L'opération $\neg$ est prioritaire sur les autres, ainsi $\neg P \Rightarrow Q$ vaut $(\neg P) \Rightarrow Q$, etc.

1. a. Quelle est la table de vérité de l'énoncé

$$P \text{ et } (P \Rightarrow Q)$$

en fonction des valeurs de vérités de P et de Q ? De quelle formule simple en P et Q reconnaît on la table de vérité ?

b. Mêmes questions pour l'énoncé

$$\neg P \text{ et } (P \Rightarrow Q)$$

2. Donner la négation formelle des énoncés suivants

a. $\forall x \in E,\ \sin(x) > 0$

b. $\exists y \in]0,1],\ \forall x \in E,\ \sin(x) > y$

c. $\exists y \in]0,1],\ \forall x \in E,\ \sin(x) > 0 \Rightarrow \sin(x) > y$

3. Pour chacun des énoncés suivants indiquer les variables libres et les variables liées. Donner un type raisonnable pour les variables libres en expliquant votre choix.

a. $\forall x \in E,\ \sin(x) > 0$

b. $\forall n : \mathbb{N},\ n \geq p \Rightarrow u_n \geq u_{n+1}$

c. $\det(A) \neq 0 \Rightarrow \exists X : \mathrm{M}_{3,1}(\mathbb{R}),\ AX = B$

4. Parmi les énoncés informels suivants, lesquels sont des traductions exactes (c'est à dire équivalent au sens logique) de l'énoncé formalisé ci-dessous ? Si l'énoncé ne dit rien, cocher la case "Il n'y a rien à dire". Si aucun des énoncés ne convient, cocher la case "Aucun ne convient"

$$\forall n : \mathbb{N},\ n \geq p \Rightarrow u_n \geq u_{n+1}$$

- ☐ La suite (u_n) est croissante
- ☐ Si l'entier n est plus grand que p alors le nombre u_n est plus grand que u_{n+1}
- ☐ La suite (u_n) est décroissante à partir d'un certain rang
- ☐ La suite (u_n) est croissante à partir du rang p
- ☐ Il n'y a rien à dire
- ☐ Aucun ne convient

5. Formaliser les énoncés suivants (E est de type une partie de $\mathbb{R}$).

a. a est un minorant de E.

b. a est le plus petit élément de E.

c. E admet un plus petit élément.

d. Toute partie non vide de $\mathbb{N}$ admet un plus petit élément.

e. Pas toutes les parties non vides de $\mathbb{Z}$ admettent un plus petit élément.

f. Pour qu'une partie de $\mathbb{Z}$ admette un plus petit élément, il faut qu'elle soit non vide et minorée.

6. Le jeu de règles donné dans l'annexe n'est pas minimal : certaines règles se déduisent des autres par un calcul des séquents. Voici un tel calcul où f représente une formule en les variables libres de Γ et les constantes, dont le résultat est un objet de type $\mathcal{T}$:

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\Gamma, x:\mathcal{T}, P(x) \ \vdash\ Q(x)}{\Gamma, x:\mathcal{T} \ \vdash\ P(x) \Rightarrow Q(x)}}{\Gamma \ \vdash\ \forall x:\mathcal{T},\ P(x) \Rightarrow Q(x)} \qquad \dfrac{\dfrac{}{\Gamma, P(f) \Rightarrow Q(f) \ \vdash\ P(f) \Rightarrow Q(f)}}{\Gamma, (\forall x:\mathcal{T},\ P(x) \Rightarrow Q(x)) \ \vdash\ P(f) \Rightarrow Q(f)}}{\Gamma \ \vdash\ P(f) \Rightarrow Q(f)}}{\Gamma, P(f) \ \vdash\ Q(f)}$$

a. Quelles sont les règles utilisées à chaque étape du calcul ? Indiquez les sur le sujet.

b. De quelle règle ce calcul est la preuve ?

c. Comment s'applique cette règle à la situation suivante :

$\Gamma, x:\mathcal{T}, P(x) \ \vdash\ Q(x)$ est le séquent

$$a, b:\mathbb{R}, a < b, h:[a,b] \to \mathbb{R}, h \text{ est continue}, h(a) < 0, h(b) > 0 \ \vdash\ \exists c \in]a,b[, h(c) = 0$$

la formule f est la donnée de la fonction $x \mapsto x^3 + x + 1$ sur l'intervalle $[-2,-1]$?

7. Voici une preuve en calcul des séquents (écrite en deux parties pour respecter les contraintes de mise en page).

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{a:\mathbb{R}, a=2 \ \vdash\ 4(-\frac{1}{2})+2=0}{a:\mathbb{R}, a=2 \ \vdash\ \exists x:\mathbb{R}, 4x+2=0}}{a:\mathbb{R}, a=2 \ \vdash\ \exists x:\mathbb{R}, (2-a)x^2+4x+a=0} \qquad a:\mathbb{R}, a\neq 2 \ \vdash\ \exists x:\mathbb{R}, (2-a)x^2+4x+a=0}{a:\mathbb{R} \ \vdash\ \exists x:\mathbb{R}, (2-a)x^2+4x+a=0}}{\vdash\ \forall a:\mathbb{R}, \exists x:\mathbb{R}, (2-a)x^2+4x+a=0}$$

$$\dfrac{a:\mathbb{R}, a\neq 2 \ \vdash\ 16-4(2-a)a>0 \qquad \dfrac{\alpha,\beta,\gamma:\mathbb{R}, \alpha\neq 0, \beta^2-4\alpha\gamma>0 \ \vdash\ \exists x:\mathbb{R}, \alpha x^2+\beta x+\gamma=0}{a:\mathbb{R}, a\neq 2, 16-4(2-a)a>0 \ \vdash\ \exists x:\mathbb{R}, (2-a)x^2+4x+a=0}}{a:\mathbb{R}, a\neq 2 \ \vdash\ \exists x:\mathbb{R}, (2-a)x^2+4x+a=0}$$

a. Que prouve t-on ? La preuve est elle complète ou repose t-elle sur des résultats sans preuve ? Indiquer ces résultats sans preuve le cas échéant.

Quelles règles du calcul des séquents utilise t-on à chaque étape du calcul (Indiquez les sur le sujet) ?

b. Quelle sont les idées de la preuve en langage naturel ?