L1MD – TD 1 26 jan. 2015

Révisions (Analyse-1 feuille1)

2. Vérifier, selon le principe du Modus Ponens, si les déductions suivantes sont correctes.
• Aujourd'hui s'il pleut, je sors en voiture;
aujourd'hui il ne pleut pas; alors je ne sors pas en voiture.
• Aujourd'hui s'il pleut, je sors en voiture;
je ne sors pas en voiture; alors aujourd'hui il ne pleut pas.

3. Soit p(x, y) : le point x est sur la droite y. Interpréter les écritures suivantes et faire le dessin géometrique correspondant.

$\forall x \exists y : p(x, y)$,
$\exists x \forall y : p(x, y)$,
$\forall x : p(x, y)$,
$\forall y \exists x : p(x, y)$,
$\exists y \forall x : p(x, y)$.

5. Formaliser à l'aide des quantificateurs:

• L'équation $x^2 + 1 = 0$ n'a pas de solution dans R.
• La fonction $f : R \to R$ prend la seule valeur 2.
• La fonction $f : R \to R$ est paire.
• La fonction $f : R \to R$ a un unique zéro.

6. On considère p(x) : x est un élève, q(x) : x adore les maths. Formaliser:
• tous les élèves adorent les maths.
• pas tous les élèves adorent les maths.

Construction d'objets

7. Réfléchir à une définition aussi complète que possible de
- la fonction racine carré
- la fonction ln
- le nombre e
- la fonction exp
- la fonction cos
- le nombre pi
- le nombre complexe i

L1MD – TD 2   26 janv. 2015

Enoncés

Une * déclare une question comme délicate

1. Quelles sont les variables libres, les variables liées et les constantes dans les expressions ou énoncés suivants :

$\forall f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f$ est borné

$\exists M \in \mathbb{R},\ \forall x \in \mathbb{R},\ |f(x)| \leq M$

$\forall t \in \mathbb{R},\ \sin(\pi - t) = \sin(t)$

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{n}{n+1} = 1$$

* $\ln(1 + x) \sim x$ au voisinage de 0.

2. Les énoncés suivants sont ils bien formés (*i.e.* syntaxiquement corrects) ?

$\forall x \in \mathbb{R},\ \sin(x) = x$

$\forall x \in \mathbb{R},\ \exists x \in \mathbb{R},\ x = x$

$\forall x \in \mathbb{R},\ \int_0^x \sin(x)dx > 0$

$\forall x \in \mathbb{R},\ \int_0^1 \sin(x)dx > 0$

$\big(\forall x \in \mathbb{R},\ \int_0^x \sin(t)dt > 0\big)$ ou $\big(\exists y \in \mathbb{R},\ \int_0^y \sin(x)dx > 0\big)$

3. Donner la table de vérité des énoncés suivants suivant les valeurs de vérité de P, Q, R :

$$\big(P \Rightarrow Q\big) \Rightarrow \big(P \Leftrightarrow Q\big)$$

$$\Big(\big(P \Rightarrow Q\big) \Rightarrow R\Big) \ \Rightarrow\ \big(\neg P \Rightarrow R\big)$$

Que disent ces énoncés ?

4. On apprend en cours d'analyse le théorème suivant :

"Si $(u_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ converge dans $\mathbb{R}$ alors $u_{n+1} - u_n$ tend vers 0 quand n tend vers ∞"

Que déduit on de ce théorème pour la suite $(\ln(n))$:

- Que la suite $(\ln(n))$ converge dans $\mathbb{R}$.
- Que la suite $\big(\ln(n+1) - \ln(n)\big)$ tend vers 0.
- Que la suite $\big(\ln(n+1) - \ln(n)\big)$ ne tend vers 0.
- Que la suite $(\ln(n))$ ne converge pas dans $\mathbb{R}$.

5. E désigne l'ensemble $\{0, 2, 3, 4\}$. Pour $n \in \mathbb{N}$, $P(n)$ désigne l'énoncé "n^2 est pair" et $Q(n)$ l'énoncé "$n^2 + n$ est pair". Quelle est la valeur de vérité des énoncés suivants ?

$\forall n \in E,\ P(n)$

$\exists n \in E,\ P(n)$

$\exists n \in E,\ Q(n)$

$\forall n \in \mathbb{N},\ Q(n)$

6. Pour chacune des tables de vérité ci-dessous trouver un énoncé compatible aussi simple que possible, formé avec les variables P,Q,R (de type énoncé) et avec les connecteurs logiques habituels (non, et, ou, $\Rightarrow$, $\Leftrightarrow$). Reformuler ensuite l'énoncé avec les seuls connecteurs $\neg$ (non) et $\vee$ (ou).

P	Q	
V	V	F
V	F	V
F	V	V
F	F	V

P	Q	R	
V	V	V	V
V	V	F	V
V	F	V	F
V	F	F	V
F	V	V	V
F	V	F	F
F	F	V	V
F	F	F	V