L1MD – feuille 3 **9 février 2014**

1. Quelles constructions apparaissent dans les énoncés de l'ex. 1 de la feuille 2 ?

2. Réécrire (pour la logique classique) chacun des énoncés suivants avec chacune des listes d'opérations et quantificateurs indiquées ($\neg$ signifie 'non') :

a. P ou $\neg P$ avec ($\neg$, et) puis ($\neg, \Rightarrow$)

b. $(\neg P \Rightarrow P) \Rightarrow P$ avec ($\neg$, et) puis ($\neg$, ou)

c. $\exists x,\ P(x) \Rightarrow Q(x)$ avec ($\forall, \neg$, et)

3. Les énoncés suivants sont ils des tautologies ? Justifier par une argumentation aussi courte que possible (table de vérité, réécriture, distinguer suivant les valeurs d'une variable, etc.).

$$P \text{ ou } \neg P\ , \qquad (\neg P \Rightarrow P) \Rightarrow P\ , \qquad (P \Rightarrow \neg P) \text{ ou } P\ , \qquad ((P \Rightarrow Q) \text{ et } \neg Q) \Rightarrow \neg P$$

$$\neg(P \text{ ou } Q) \Leftrightarrow (\neg P \text{ ou } \neg Q)\ , \qquad \text{Faux} \Leftrightarrow (P \text{ et } \neg P)\ , \qquad \neg(P \text{ et } Q) \Leftrightarrow (\neg P \text{ ou } \neg Q)$$

$$((P \Rightarrow Q) \text{ et } (Q \Rightarrow R)) \Rightarrow (P \Rightarrow R)$$

Que disent ces énoncés ?

4. A un énoncé P on associe le nombre $\overline{P}$ de $(\mathbb{F}_2, +, \times)$ suivant les règles $\overline{V} = 1$, $\overline{\neg P} = 1 - \overline{P}$, $\overline{P \text{ et } Q} = \overline{P} \times \overline{Q}$. Comment s'expriment $\overline{P \text{ ou } Q}$, $\overline{P \Rightarrow Q}$, $\overline{P \Leftrightarrow Q}$ en fonction de $\overline{P}$ et $\overline{Q}$?

Donner les expressions algébriques dans $(\mathbb{F}_2, +, \times)$ des énoncés du précédent exercice puis développer et simplifier. Retrouve t-on que les énoncés sont des tautologies ou ne le sont pas ?

5. Qu'appelle t-on la contraposée de $A \Rightarrow B$? Quelle est la négation de $A \Rightarrow B$?

Donner la contraposée des assertions suivantes :

a. Je partirai en vacance si je réussis mon examen.

b. Cette année je prendrai un abonnement à l'opéra à condition que la programmation me plaise et que le tarif soit raisonnable.

c. Je partirai en vacances si je suis pris comme moniteur dans une colonie ou bien si Paul me propose de venir avec lui dans sa maison de campagne.

Quelle est parmi ce qui suit la négation logique de la première assertion ci-dessus ?

a. Je ne partirai pas en vacance si je réussis mon examen.

b. Il ne faut pas que je réussisse mon examen pour que je parte en vacance.

c. Je réussirai mon examen et je ne partirai pas en vacance.

6. Formaliser les énoncés qui suivent avec les constructions, opérations, relations et constantes de la liste

$$\forall, \exists, \text{ et, ou, non}, \Rightarrow, \Leftrightarrow, =, \neq, \in, \leq, \geq, <, >, \mathbb{Z}, \mathbb{R}, 0$$

a. L´équation $x^2 + x + 1 = 0$ n'a pas de solution dans $\mathbb{R}$.

b. Les applications $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ne sont pas toutes injectives.

c. La fonction ln n'est pas majorée sur $]0, +\infty[$.

d. Les solutions complexes de l'équation $x^3 + x + 1 = 0$ sont conjuguées.

e. Tout nombre réel admet une unique partie entière.

f. Le produit de deux nombres réels est négatifs si et seulement si les nombres sont de signe opposé.

g. L'ensemble E est un intervalle de $\mathbb{R}$.

h. L'intersection de deux intervalles est un intervalle.

7. Donner une condition nécessaire mais non suffisante puis une condition suffisante mais non nécessaire pour qu'un entier naturel soit divisible par 12.

8. Formaliser (partiellement) puis donner la négation de l'énoncé formalisé avec les notations (ou type) indiqués pour certains objets et les résumés indiqués pour certains énoncés :

a. "L'image d'un intervalle par une fonction continue $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est un intervalle" avec le type $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ pour les fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ et les résumés "f est continue" pour $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ et "E est un intervalle" pour E une partie de $\mathbb{R}$.

b. "Toute suite croissante et majorée de nombres réels est convergente" avec $\mathbb{R}$ pour le type (ou ensemble) "suite de nombre réel" et le résumé "(u_n) est convergente" pour (u_n) une suite de nombres réels.

c. "Toute suite à valeur dans I admet une sous-suite convergente dans I" pour I un intervalle de $\mathbb{R}$, avec $\mathbb{R}$ comme notation pour l'ensemble des suites numériques et le résumé "(u_n) converge vers l" pour (u_n) une suite de nombres réels et l un nombre réel.

9. Que disent les énoncés suivants dans le contexte spécifié ? Connaissez vous la valeur de vérité de ces énoncés ?

a. "$\forall a, b \in \mathbb{R},\ a < b \Rightarrow a^2 < b^2$".

b. "$\exists y \in E,\ \forall x \in E,\ y \geq x$" où E est une partie de $\mathbb{R}$.

c. "$\forall x \in E,\ \exists y \in E,\ y > x$" où E est une partie de $\mathbb{R}$.

d. "$\exists y \in E,\ \forall x \in E,\ y > x$" où E est une partie de $\mathbb{R}$.

e. "$\forall n \in,\ u_{n+1} \leq u_n$" où (u_n) est une suite numérique.

f. "$\forall n \in,\ \exists m \in,\ m > n$ et $u_m > u_n$" où (u_n) est une suite de nombres compris entre 0 et 1.

g. "$\forall n \in,\ \exists p, q \in,\ q > p > n$ et $u_q > u_p$" où (u_n) est une suite de nombres compris entre 0 et 1.

h. "$\forall n \in,\ \exists m \in,\ m \geq n$ et $u_m \leq u_n$" où (u_n) est une suite de nombres compris entre 0 et 1.