L1MD – feuille 5   16 mars 2015

Constructions et réécritures

1. Donner une défintion de chacune des constructions suivantes sous forme d'une réécriture de l'énoncé $t' = C(t)$ par un énoncé plus élémentaire (ne faisant pas intervenir la construction C). Au passage donner un type cohérent de t et de t' (la réponse n'est peut être pas unique).

Exemple : $\sqrt{x}$ défini par $\quad y = \sqrt{x} \equiv (y \geq 0 \text{ et } y^2 = x) \quad$ pour $x, y : \mathbb{R}$.

$[0,1]$, $\quad \lim_{n\to+\infty} u_n$, $\quad \ln(x)$, $\quad \{1,2,3\}$ (réécrire sans $\{\}$), $\quad \det\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, $\quad \bar{z}$

$f(x) \sim_{x\to 0} g(x)$ (construction $\sim_{x\to 0}$)

2. Réécrire les énoncés suivants en utilisant la réécriture

$$P(a) \equiv \forall x : T, (x = a) \Rightarrow P(x)$$

pour $a : T$ et P une propriété des objets de type T, et en utilisant une définition de la construction mentionnée.

Exemple $\sqrt{2} > 1$ avec une déf. de $\sqrt{}$: $\forall y : \mathbb{R},\ (y \geq 0 \text{ et } y^2 = 2) \Rightarrow y > 1$

- $[0,1] \neq \emptyset$ avec une déf. de $[\ ,\ ]$
- $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ n'est pas en bijection avec $\mathbb{N}$ avec une déf. de $\mathcal{P}(\ )$
- $z\bar{z} > 0 \Leftrightarrow z \neq 0$ avec une déf. de $\bar{\ }$ (la conjugaison complexe)
- $\ln(ab) = \ln(a) + \ln(b)$ avec une déf. de ln
- $\lim_{n\to+\infty} \dfrac{2n^2 - n}{1 + n^2} > 1$ avec une déf. de $\lim_{+\infty}$

Contextes et séquents

3. Les séquents suivants sont mal formés : certaines variables libres ne sont pas déclarées, certaines variables liées ne sont pas typées. Corriger avec un type raisonnable pour ces variables en expliquant votre choix de type. Comment se traduisent ces séquents en langage naturel ?

a. $a > 0, b > 0 \ \vdash\ ab > 0$

b. $a, b :]0, +\infty[\ \vdash\ a < b \Rightarrow f(a) < f(b)$

c. $a < b, f \geq 0 \ \vdash\ \displaystyle\int_a^b f \geq 0$

d. $u_0 = \dfrac{1}{2}, \left(\forall n,\ u_{n+1} = \sqrt{u_n}\right) \ \vdash\ \lim_{n\to+\infty} u_n = 1$

e. $\ \vdash\ \det A \neq 0 \Rightarrow \left(\left\{(x,y), A\binom{x}{y} = \binom{0}{0}\right\} \text{ est un singleton}\right)$

4. Ecrire les contextes formalisés (ce qu'on mettrait à gauche du symbole $\vdash$ d'un séquent) correspondant aux situations suivantes

a. E est une partie de $\mathbb{R}$; M est un majorant de E.

b. E est une partie majorée de $\mathbb{R}$.

c. E est une partie de $\mathbb{R}$ admettant un plus petit élément.

d. E est une partie de $\mathbb{R}$; M est la borne supérieure de E.

e. E est une partie de $\mathbb{R}$ admettant une borne supérieure.

f. A est une matrice réelle carré inversible de taille n.

g. A est une matrice réelle de taille $m \times n$; X est un vecteur colonne vérifiant $AX = 0$.

5. *(interrogation de mai 2014)* Traduire chacun des théorèmes suivants (indiqués entre "–") par un séquent puis formaliser en utilisant au besoin les formalisations partielles indiquées (c'est à dire sans les formaliser davantage).

Quel séquent ou liste de séquents obtient on après application autant qu'on le peut des règles "gratuites" $(\vdash \forall), (\vdash \Rightarrow), (\vdash \text{ et }), (\exists \vdash), (\text{ et } \vdash), (\text{ ou } \vdash)$?

a. "Le produit de deux suites de nombres réels convergentes est une suite convergente" — En utilisant le résumé $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = l$ avec les variables de son choix.

b. "Soient x, y, z trois ensembles. Alors il existe un ensemble dont les éléments sont exactement x, y, z, et deux tels ensembles sont égaux" — On n'utilisera pas la construction $\exists!$; on utilisera les énoncés tels que $a \in A$, $A = B$ avec les variables de son choix.

6. Pour chacune des propositions suivantes écrire le séquent entièrement formalisé correspondant puis appliquer les règles réversibles jusqu'à obtenir un séquent plus simple.

a. Le produit de deux nombres positifs est positif.

b. Toute partie non vide majorée de $\mathbb{R}$ admet une borne supérieure

c. Le produit de deux suites convergentes de nombres réels est une suite convergente.

d. Toute fonction polynomiale $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est continue.

e. La composée de deux applications continues $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est continue.

f. Le produit de deux matrices carré inversibles de même taille est un matrice carré inversible.