L1MD – Feuille[1] de référence sur les preuves (calcul des séquents) 2014-15

1. Représentation des règles et des preuves

Une règle du calcul des séquents se présente sous la forme

$$(\text{'nom'})\ \frac{\Gamma_1 \vdash B_1 \quad \Gamma_2 \vdash B_2 \quad \ldots}{\Gamma'_1 \vdash B'_1 \quad \ldots}$$

Elle signifie que le (ou les) séquent(s) en bas se déduit du (ou des) séquent(s) en haut par application de la règle nommée 'nom'. La règle est dite réversible s'il existe une règle permettant de faire le chemin inverse ; on désignera alors la règle inverse par le même nom suivi de "inversé" ou "inv". On insistera sur le caractère réversible de la règle en ajoutant le symbole $\updownarrow$ à côté du nom. A contrario on insistera sur le caractère non réversible de la règle en ajoutant le symbole $\downarrow$ à côté du nom.

Une preuve est une suite d'applications de règles (un calcul) faisant passer d'une liste de séquents déjà prouvés ou admis (en particulier les axiomes) à une liste de séquents contenant le séquent à prouver. Les preuves peuvent être écrites à "l'envers" avec en première ligne le séquent à prouver (l'arbre de calcul a sa racine en haut) ; les règles s'appliquent alors de bas en haut.

2. Les principales règles (liste ni minimale ni exhaustive)

Règles primaires

Transformation de la conclusion ($\neg A$ désigne la négation de A) :

$(\vdash \text{et})\updownarrow\ \dfrac{\Gamma \vdash A \quad \Gamma \vdash B}{\Gamma \vdash A \,\text{et}\, B}$ $\qquad (\vdash\Rightarrow)\updownarrow\ \dfrac{\Gamma, A \vdash B}{\Gamma \vdash A \Rightarrow B}$ $\qquad (\vdash \text{ou})\updownarrow\ \dfrac{\Gamma, \neg A \vdash B}{\Gamma \vdash A \,\text{ou}\, B}$

$(\vdash \forall)\updownarrow\ \dfrac{\Gamma, x : \mathcal{T} \vdash P(x)}{\Gamma \vdash \forall x : \mathcal{T}, P(x)}$ où x est une variable (de type $\mathcal{T}$) n'apparaissant pas dans Γ et où $P(x)$ est un énoncé dépendant de x (une propriété des objets de type $\mathcal{T}$, on devrait écrire $P : x \mapsto P(x)$).

$(\vdash \exists)[f]\downarrow\ \dfrac{\Gamma \vdash P(f)}{\Gamma \vdash \exists x : \mathcal{T}, P(x)}$ où x est une variable (de type $\mathcal{T}$) n'apparaissant pas dans Γ, $P(x)$ est un énoncé dépendant de x et où f est une formule en les variables libres de Γ et en les constantes, dont le résultat est un objet de type $\mathcal{T}$. Règle non réversible. L'argument $[f]$ à côté du nom de la règle précise la formule employée.

Affaiblissement $(\vdash \text{aff})\downarrow\ \dfrac{\Gamma \vdash B}{\Gamma \vdash A \,\text{ou}\, B}$

Transformation des hypothèses

$(\text{et} \vdash)\updownarrow\ \dfrac{\Gamma, A, B \vdash C}{\Gamma, A \,\text{et}\, B \vdash C}$ $\qquad (\text{ou} \vdash)\updownarrow\ \dfrac{\Gamma, A \vdash C \quad \Gamma, B \vdash C}{\Gamma, A \,\text{ou}\, B \vdash C}$

$(\exists \vdash)\updownarrow\ \dfrac{\Gamma, x : \mathcal{T}, P(x) \vdash B}{\Gamma, (\exists x : \mathcal{T}, P(x)) \vdash B}$ où x est une variable (de type $\mathcal{T}$) n'apparaissant pas dans Γ ni dans B et où $P(x)$ est un énoncé dépendant de x.

$(\forall \vdash)[f]\downarrow\ \dfrac{\Gamma, P(f) \vdash B}{\Gamma, (\forall x : \mathcal{T}, P(x)) \vdash B}$ où x est une variable (de type $\mathcal{T}$) n'apparaissant pas dans Γ ni dans B, $P(x)$ est un énoncé dépendant de x et où f est une formule en les variables libres de Γ et en les constantes dont le résultat est un objet de type $\mathcal{T}$. Règle non réversible.

Affaiblissement $(\text{aff} \vdash)\downarrow\ \dfrac{\Gamma \vdash B}{\Gamma, A \vdash B}$

Axiomes

Un axiome est un séquent admis sans qu'on en donne ou même puisse en donner une preuve. A un axiome $\Gamma \vdash B$ correspond la règle

$$(\text{ax.})\ \frac{}{\Gamma \vdash B}$$

qu'on peut renommer du nom de l'axiome s'il en a un.

[1]Version du 5 mai 2015 — F-X. Dehon, Université de Nice — dehon@unice.fr

Voici deux axiomes propre à la logique mathématique :

$$(\text{cqfd}) \quad \Gamma, B \vdash B$$

(Si B est déjà dans l'hypothèse alors on a B.)

$$(=) \quad \Gamma, x, y : \mathcal{T}, x = y \vdash P(x) \Leftrightarrow P(y)$$

où $P(t)$ est un énoncé dépendant d'un paramètre t de type $\mathcal{T}$. Si f et g sont des formules ("constructions") en les variables libres de Γ et en les constantes, dont les résultats sont des objets de type $\mathcal{T}$ alors on peut appliquer cet axiome à $x := f$ et $y := g$ (cf "appliquer un théorème" plus loin), on obtient $(=)\ \Gamma, f = g \vdash P(f) \Leftrightarrow P(g)$.

Pour être complet il faut aussi énoncer la réflexivité de l'égalité :

$$\vdash \forall x, x = x$$

Définitions

Chaque définition d'objet se traduit en un axiome dont la conclusion est une relation d'égalité si la définition est explicite, une équivalence entre relations d'égalité si la définition est implicite. Ainsi par exemple si la fonction ln est définie comme $x \mapsto \int_1^x \frac{dt}{t}$ alors on aura l'axiome

$$(\text{déf})\ x :]0, +\infty[\vdash \ln(x) = \int_1^x \frac{dt}{t}\ .$$

Si elle est définie après la fonction exponentielle par la condition $\exp(\ln(x)) = x$ pour tout x alors on aura l'axiome

$$(\text{déf})\ x, y : \mathbb{R} \vdash y = \ln(x) \Leftrightarrow \exp(y) = x\ .$$

Règles classiques de raisonnement ("Macro-règles")

Le plus souvent elles ne sont pas réversibles.

Réécritures $(\vdash\Leftrightarrow)\ \dfrac{\Gamma \vdash P \Leftrightarrow Q \quad \Gamma \vdash P}{\Gamma \vdash Q} \qquad (\Leftrightarrow\vdash)\ \dfrac{\Gamma \vdash P \Leftrightarrow Q \quad \Gamma, P \vdash B}{\Gamma, Q \vdash B}$.

On omet de mentionner le séquent $\Gamma \vdash P \Leftrightarrow Q$ si ce séquent est un axiome (cf les axiomes $(=)$ et (déf) plus haut) ou si l'équivalence entre P et Q résulte d'une opération simple (un calcul algébrique simple ou une table de vérité simple). Dans ce cas on écrit les règles de réécriture de façon abrégée

$$(\vdash\equiv)\ \frac{\Gamma \vdash P}{\Gamma \vdash Q} \qquad (\equiv\vdash)\ \frac{\Gamma, P \vdash B}{\Gamma, Q \vdash B}$$

Invoquer A, observer A, Modus Ponens : $\quad (\text{mp})\ \dfrac{\Gamma \vdash A \quad \Gamma, A \vdash B}{\Gamma \vdash B}$

Appliquer (ou particulariser) un théorème à un cas particulier

$$(\text{app})[x := f]\ \frac{\Gamma, x : \mathcal{T}, P(x) \vdash Q(x)}{\Gamma, P(f) \vdash Q(f)}$$

où $P(t), Q(t)$ sont des énoncés dépendants d'un paramètre t de type $\mathcal{T}$ et où f est une formule en les variables libres de Γ et en les constantes, dont le résultat est un objet de type $\mathcal{T}$.

Distinguer suivant une hypothèse H : $(H)\ \dfrac{\Gamma, H \vdash B \quad \Gamma, \neg H \vdash B}{\Gamma \vdash B}$.

Contraposée $\dfrac{\Gamma, \neg B \vdash \neg A}{\Gamma, A \vdash B}$.

Raisonnement par l'absurde $\dfrac{\Gamma, \neg B \vdash P \text{et} \neg P}{\Gamma \vdash B}$.