L1MD – session 2 17 juin 2015

Durée 2H ; tout document autre que celui distribué et tout matériel électronique interdit

1. Quelle est la table de vérité de l'énoncé

$$Q \text{ et } (P \Rightarrow Q)$$

en fonction des valeurs de vérités de P et de Q ? De quelle formule simple en P et Q reconnaît on la table de vérité ?

2. On veut connaître la valeur de vérité de l'énoncé

$$(E) \qquad \big((Q \Rightarrow P) \Rightarrow (R \Rightarrow Q)\big) \text{ ou } (P \Rightarrow R)$$

en fonction des valeurs de vérité de P, Q, R (*i.e.* la table de vérité de (E)).

a. Expliquer le raisonnement suivant :

"Pour que (E) soit faux il faut que $P \Rightarrow R$ soit faux donc que P soit vrai et que R soit faux."

b. Quelle table de vérité obtient on pour (E) ?

3. Donner la négation formelle des énoncés suivants

a. $\forall x \in I,\ \sin(x) < 0$

b. $\exists y \in]0,1],\ \forall x \in I,\ \sin(x) < y$

c. $\exists y \in]0,1],\ \forall x \in I,\ \sin(x) < y \Rightarrow \sin(x) < 0$

4. Pour chacun des énoncés suivants indiquer les variables libres et les variables liées. Donner un type précis raisonnable pour les variables libres en expliquant votre choix.

a. $\forall x \in I,\ \sin(x) < 0$

b. $\forall n : \mathbb{N},\ n \geq k \Rightarrow u_n \leq u_{n+1}$

c. $\det(P) \neq 0 \Rightarrow \exists X : \mathrm{M}_{4,1}(\mathbb{R}),\ PX = B$

5. Formaliser les énoncés suivants (dans les trois premiers énoncés, E désigne une partie de $\mathbb{R}$).

a. a est un majorant de E.

b. a est le plus grand élément de E.

c. E admet un plus grand élément.

d. Toute partie non vide de $\mathbb{Z}_-$ (les entiers négatifs ou nuls) admet un plus grand élément.

e. Pas toutes les parties non vides de $\mathbb{Z}$ admettent un plus grand élément.

f. Pour qu'une partie de $\mathbb{Z}$ admette un plus grand élément, il faut qu'elle soit non vide et majorée.

6. Traduire les séquents b et c suivant le modèle a, c'est à dire en langage naturel en respectant la déclaration des variables et sans faire intervenir (autant que possible) de variables liées.

a. $x : \mathbb{R} \vdash \exists n : \mathbb{N}, x \leq n$

"Soit x un nombre réel. Alors x est majoré par un entier naturel."

b. $A : \mathrm{M}_{3,3}(\mathbb{R}), \det(A) = 0 \ \vdash \ \exists B : \mathrm{M}_{3,1}(\mathbb{R}), \ \forall X : \mathrm{M}_{3,1}(\mathbb{R}), AX \neq B$

c. $(u_n) : \mathbb{R}^{\mathbb{N}}, \ \big(\forall n : \mathbb{N}, u_n \leq u_{n+1}\big), \ \big(\exists a : \mathbb{R}, \forall n : \mathbb{N}, u_n \leq a\big) \ \vdash \ \exists l : \mathbb{R}, \ \lim\limits_{n \to +\infty} u_n = l$

7. Le jeu de règles donné dans l'annexe n'est pas minimal : certaines règles se déduisent des autres par un calcul des séquents. Voici un tel calcul où f représente une formule en les variables libres de Γ et les constantes, dont le résultat est un objet de type $\mathcal{T}$:

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\Gamma, x : \mathcal{T}, P(x) \ \vdash \ Q(x)}{\Gamma, x : \mathcal{T} \ \vdash \ P(x) \Rightarrow Q(x)}}{\Gamma \ \vdash \ \forall x : \mathcal{T}, \ P(x) \Rightarrow Q(x)} \qquad \dfrac{\dfrac{}{\Gamma, P(f) \Rightarrow Q(f) \ \vdash \ P(f) \Rightarrow Q(f)}}{\Gamma, (\forall x : \mathcal{T}, \ P(x) \Rightarrow Q(x)) \ \vdash \ P(f) \Rightarrow Q(f)}}{\dfrac{\Gamma \ \vdash \ P(f) \Rightarrow Q(f)}{\Gamma, P(f) \ \vdash \ Q(f)}}$$

a. Quelles sont les règles utilisées à chaque étape du calcul ? Indiquez les sur le sujet.

b. De quelle règle de l'annexe ce calcul est il la preuve ?

c. Quel séquent obtient on si on applique la règle au séquent

$$a, b : \mathbb{R}, a < b, h : [a, b] \to \mathbb{R}, h \text{ est continue}, h(a) < 0, h(b) > 0 \ \vdash \ \exists c \in]a, b[, h(c) = 0$$

avec pour formule f (dans la règle) la donnée de la fonction $x \mapsto x^3 + x + 1$ sur l'intervalle $[-1, 0]$?

Que faut il encore prouver (ou vérifier) pour déduire de ce dernier séquent que le polynôme $x^3 + x + 1$ admet une racine réelle comprise entre -1 et 0 ?