L1 MD 2016 qq corrigés d'exercices des feuilles 1, 2, 3

f1 ex1 * $\exists M \in \mathbb{R}, \forall x \in \mathbb{R}, |f(x)| \leq M$

M, x sont des var. liées par les quantificateurs $\exists$, $\forall$

f est une variable libre

$\mathbb{R}$ est une constante (et si on pousse plus loin, $\in, \leq$ sont des constantes)

* $\lim_{n \to +\infty} \frac{n}{n+1} = 1$ — n est une variable liée par la construction $\lim_{n \to \dots}$

$+\infty, 1$ sont des constantes (et si on pousse plus loin + égalt)

* $\ln(1+x) \sim x$ au voisinage de 0

$\ln, 1, 0$ sont des constantes ; x est une variable. L'énoncé n'aurait pas de sens si x était une variable libre (auquel cas $\ln(1+x)$ et x désignerait des nombres). Ici $\ln(1+x)$ est une abréviation de $x \mapsto \ln(1+x)$ donc x est implicitement lié

f1 ex2 cf corrigé du QCM du 8 fev.

f1 ex3 * $\forall n, u_{n+1} = \sqrt{u_n}$ — n est une var. liée par $\forall$. Elle apparait en indice dans l'expression u_n donc vraisemblablement n est de type $\mathbb{N}$ et u_n désigne le n-ième terme de la suite u ou (u_n) donc u est une variable de type suite ; elle n'est pas liée. L'expression u_n est de type $\mathbb{R}$ (ou $\mathbb{R}_+$) à cause de $\sqrt{\ }$ donc u est de type suite de nbres réels ($\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$)

* $p \circ p = p$ — On reconnait la composition des applications $\rightsquigarrow$ p var. de type application $E \to E$ pour un certain ensemble E. p n'est pas liée

* $f^{-1}(A \cap B) = f^{-1}(A) \cap f^{-1}(B)$ — f, A, B sont des var. libres. A, B sont de type ensemble à cause de l'expression $A \cap B$. De même les expressions $f^{-1}(A), f^{-1}(B)$. On reconnait dans $f^{-1}(A)$ la notation pour "l'image réciproque de A par f" donc f est une application $E \to F$ où E, F sont des ensembles et A, B sont des parties de F

f1 exercice 1 (au dos) $\forall \varepsilon > 0, \exists \alpha > 0, \forall x$ si $|x - x_0| < \alpha$ alors $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$

symboles $\forall, \varepsilon, >, 0, \exists, \alpha, x, |, -, x_0, <, f, (,)$

$\varepsilon, \alpha, x, x_0$ sont des variables de type $]0, +\infty[$ pour ε, α, de type vraisemblablement $\mathbb{R}$ pour x et x_0 à cause de $|x - x_0|$

(ce pourrait être aussi $\mathbb{C}$ avec $|\ |$ désignant le module d'un nombre complexe)

f est de type fonction à cause de $f(x)$, fonction d'ensemble de départ $\mathbb{R}$ car $x : \mathbb{R}$ (c'est le choix qu'on a fait ci-dessus)

d'ens. d'arrivée $\mathbb{R}$ à cause de $|f(x) - f(x_0)|$ donc $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

Expressions $x - x_0$, $|x - x_0|$, $f(x)$, $f(x_0)$, $f(x) - f(x_0)$, $|f(x) - f(x_0)|$ sont des expressions de type $\mathbb{R}$

$|x - x_0| < \alpha$ et $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$ sont des expressions de type Énoncé (ou Booléen)

f1 exercice 4 ii. Il existe deux entiers q et r tels que $a = bq + r$ et $0 \leq r < b$

q, r sont des variables introduites dans l'énoncé de portée cet énoncé même (elles ont cours dans l'énoncé entier). Elles sont donc liées

a, b sont deux variables non introduites par l'énoncé donc libres. Leur portée dépasse l'énoncé.

f1 exercice 4 (dos) iii). "le PGCD de a et b est l'entier d tel que : $\underbrace{d \text{ divise } a \text{ et } b \text{ et } \underbrace{d' \leq d \text{ pour tout entier } d' \text{ qui divise } a \text{ et } b}_{\text{portée de } d'}}_{\text{portée de } d}$"

d et d' sont des var. introduites par l'énoncé (donc liées)

a, b sont des var. libres.

f1 ex4 Formalisation

1. $\neg(\exists x \in \mathbb{R}, x^2+x+1=0)$ ou encore $\forall x \in \mathbb{R}, x^2+x+1 \neq 0$

2. $\exists x \in [-1,0], 1+x+x^3=0$

3. $\exists f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, f n'est pas injective (formalisation partielle)

$\exists f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \exists x, y : \mathbb{R} \quad x \neq y$ et $f(x) = f(y)$

6. $\forall x : \mathbb{R}, \exists! n : \mathbb{N}$, n est une partie entière pour x (formalisation partielle)

$\forall x : \mathbb{R}, \cancel{\exists n} \; \exists! \, n : \mathbb{N}, \; n \leq x < n+1$

Sans utiliser $\exists!$: $\forall x : \mathbb{R}, \underbrace{(\exists n : \mathbb{N}, n \leq x < n+1)}_{\text{existence}}$ et $\underbrace{(\forall n, n' : \mathbb{N}, (n \leq x < n+1 \text{ et } n' \leq x < n'+1) \Rightarrow n = n')}_{\text{unicité}}$

8. $\forall a, b \in E, \; [a,b] \subset E$

Sans utiliser l'expression $[a,b]$: $\forall a, b \in E, \forall x \in \mathbb{R}, \; a \leq x \leq b \Rightarrow x \in E$

f2 ex 1.2 $A \Rightarrow B \equiv \neg A$ ou $B \equiv \neg(A$ et $\neg B)$

donc $\underbrace{(\neg P \Rightarrow P)}_{A} \Rightarrow \underbrace{P}_{B} \equiv \neg((\neg P \Rightarrow P) \text{ et } \neg P) \equiv \neg(\neg(\neg P \text{ et } \neg P) \text{ et } \neg P) \underset{\text{simplification}}{\equiv} \neg(P \text{ et } \neg P)$

$\equiv \neg(\neg\neg P \text{ ou } P) \text{ ou } P \underset{\text{simplification}}{\equiv} \neg P \text{ ou } P$

f2 ex 2

P	Q	$P \Rightarrow Q$	Q et $(P \Rightarrow Q)$
V	V	V	V
F	V	V	V
V	F	F	F
F	F	V	F

On reconnait la table de vérité de Q

f2 ex 3 Pour que A ou B soit faux il faut que B soit faux. $B \equiv P \Rightarrow R$, pour que $P \Rightarrow R$ soit faux il faut que P soit vrai et R faux. On en déduit que E est vrai dans tous les autres cas. Reste à calculer la valeur de vérité de E lorsque $P \equiv V$ et $R \equiv F$ auquel cas

$E \equiv (\underbrace{\underbrace{(Q \Rightarrow V)}_{V} \Rightarrow \underbrace{(F \Rightarrow Q)}_{V}}_{V})$ ou $F \equiv V$

f2 ex 5 (E): $((P \Rightarrow Q)$ et $\neg Q) \Rightarrow \neg P$ tautologie ?

Méthode 1 : table de vérité (fastidieux si plus que deux variables)

P	Q	$P \Rightarrow Q$	$(P \Rightarrow Q)$ et $\neg Q$	$((P \Rightarrow Q)$ et $\neg Q) \Rightarrow \neg P$
V	V	V	F	V
F	V	V	F	V
V	F	F	F	V
F	F	V	V	V

Méthode 2 choisir une variable suivant laquelle on distingue, ici P (cf ex3 pour distinguer suivant une expression plutôt qu'une var.)

Si $P \equiv F$, $\longrightarrow \neg P \equiv V$

Si $P \equiv V$ $$(E) \equiv \underbrace{(\underbrace{\underbrace{(V \Rightarrow Q)}_{\equiv Q} \text{ et } \neg Q)}_{\equiv F} \Rightarrow F}_{\equiv V}$$

Méthode 3 : Si on peut donner une preuve de (E) suivant les règles de raisonnement (cf feuille de TD 3) alors $(E) \equiv V$

| $(P \Rightarrow Q)$ et $\neg Q$ (hyp)
| $P \Rightarrow Q$ (affaibl.)
| $\neg Q \Rightarrow \neg P$ ($\equiv$) (réécriture)
| $\neg Q$ (affaibl.)
| $\neg P$ (mp)

$((P \Rightarrow Q)$ et $\neg Q) \Rightarrow \neg P$

f2 ex6 $\overline{P \Rightarrow Q} = \overline{\neg (P \text{ et } \neg Q)} = 1 + \overline{P \text{ et } \neg Q} = 1 + \bar P (1 + \bar Q)$

On reprend l'énoncé E ci-dessus (f2 ex5) $E = ((P \Rightarrow Q) \text{ et } \neg Q) \Rightarrow \neg P$

$$\bar E = 1 + \overline{(P \Rightarrow Q) \text{ et } \neg Q} \times (1 + \overline{\neg P}) = 1 + \overline{P \Rightarrow Q} \times \overline{\neg Q} \times (1 + \overline{\neg P}) = 1 + (1 + \bar P(1+\bar Q))(1+\bar Q)(\underbrace{1+1}_{=0}+\bar P)$$

$$= 1 + (\bar P + \underbrace{\bar P^2}_{=\bar P}(1+\bar Q))(1+\bar Q)$$

$$= 1 + \bar P(\underbrace{1+1}_{=0}+\bar Q)(1+\bar Q)$$

$$= 1 + \bar P \bar Q (1 + \bar Q)$$

$$= \overbrace{1 + \underbrace{\bar P \bar Q + \bar P \underbrace{\bar Q \bar Q}_{\bar Q}}_{= 2 \bar P \bar Q = 0}}^{=1}$$

On retrouve ainsi que E est une tautologie ($\bar E = \bar V$ donc $E \equiv V$)

f2 ex7 Pour la 1ère table : $\neg(P \text{ et } Q) \equiv \neg P \text{ ou } \neg Q$

Pour la 2ème table $(P \text{ et } \neg Q \text{ et } R)$ est vrai seul^t si $(P,Q,R) \equiv (V,F,V)$ donc $\neg(P \text{ et } \neg Q \text{ et } R) \equiv V$ sauf si $(P,Q,R) \equiv (V,F,V)$ donc $(\neg(P \text{ et } \neg Q \text{ et } R) \text{ et } \neg(\neg P \text{ et } Q \text{ et } \neg R))$ a même table de vérité que celle donnée.

On peut réécrire la formule avec $\neg$, ou en utilisant la réécriture $A \text{ et } B \equiv \neg(\neg A \text{ ou } \neg B)$

$\rightsquigarrow (\neg P \text{ ou } Q \text{ ou } \neg R) \text{ et } (P \text{ ou } \neg Q \text{ ou } R) \rightsquigarrow \neg(\neg(\neg P \text{ ou } Q \text{ ou } \neg R) \text{ ou } \neg(P \text{ ou } \neg Q \text{ ou } R))$

f3 ex 1   Dans l'ordre de lecture de la structure de la preuve (d'abord syntaxique : décalage à droite, puis sémantique)

$\ell 1$ (declar)
$\ell 16$
$\ell 17$ $(\vdash \forall)$

$\ell 2$ (hyp)
$\ell 8$
$\ell 3$ (hyp)
$\ell 15$
$\ell 16$ (disting. H) (Macro-règle au dos de la feuille)

$\ell 5$ (declar)
$\ell 6$
$\ell 7$ $(\vdash \forall)$

$\ell 3$
$\ell 4$ $(\vdash \exists)$

$\ell 4$
$\ell 7$
$\ell 8$ ($\Leftrightarrow$ réécriture)

$\ell 10$
$\ell 11$ $(\forall \vdash)[\alpha = 2-a, \beta = 4, \gamma = a]$

$\ell 12$
$\ell 13$
$\ell 14$ $(\vdash$ et$)$

$\ell 11$
$\ell 14$
$\ell 15$ (mp)

Restent les lignes isolées $\ell 3$, $\ell 6$, $\ell 12$, $\ell 13$, $\ell 10$: ce sont des énoncés non prouvés.

$\ell 10$ est un théorème classique : critère du discriminant pour l'existence de racine réelle d'un trinôme du second degré

$\ell 3$, $\ell 6$, $\ell 12$ résultent d'un calcul algébrique simple. Une preuve de ces lignes exigerait l'explicitation des règles du calcul algébrique.

$\ell 13$ est moins simple à prouver et constitue un manque dans la preuve. Une preuve de $\ell 13$ relève de l'étude du signe d'un trinôme du second degré

f3 ex 3

$\forall x,\ x \in A \cap B \Leftrightarrow x \in A$ et $x \in B$

$\forall x,\ x \in A \cup B \Leftrightarrow x \in A$ ou $x \in B$

$\forall x,\ x \in E \setminus A \Leftrightarrow x \in E$ et $x \notin A$ (complémentaire de A dans E)

$\forall x : \mathrm{Ens},\ x \in \mathcal{P}(E) \Leftrightarrow x \subset E$ (ici on donne un type à x ds $\forall x$ parce que l'énoncé $x \subset E$ suppose $x : \mathrm{Ens}$)

$\forall x,\ x \in f(A) \Leftrightarrow \exists y : E,\ x = f(y)$ (on donne le type E à y ds $\exists y$ parce que l'expression $f(y)$ suppose $y : E$)

$\forall x,\ x \in f^{-1}(B) \Leftrightarrow x \in E$ et $f(x) \in B$ ou bien $\forall x : E,\ x \in f^{-1}(B) \Leftrightarrow f(x) \in B$

f3 ex 4 $\forall x,\ x \in E \setminus (A \cup B) \Leftrightarrow x \in E$ et $\neg (x \in A \cup B)$ cf def. de $E \setminus A$ ci-dessus

$\Leftrightarrow x \in E$ et $\neg (x \in A$ ou $x \in B)$ cf def de $A \cup B$

$\Leftrightarrow x \in E$ et $x \notin A$ et $x \notin B$

$\Leftrightarrow x \in E \setminus A$ et $x \in E \setminus B$

$\Leftrightarrow x \in (E \setminus A) \cap (E \setminus B)$

donc $E \setminus (A \cup B) = (E \setminus A) \cap (E \setminus B)$ (définition de l'égalité entre ensembles).