L1 MD 2016 qq corrigés (suite)

f3 ex 2

On veut prouver $\forall E : Ens,\ \neg(\exists \varphi : E \to \mathcal{P}(E),\ \varphi \text{ est bijective})$

Esquisse de preuve : soit $\varphi : E \to \mathcal{P}(E)$ bijection ; on forme $A = \{x : E,\ x \notin \varphi(x)\}$; il existe $e \in E$ tq $\varphi(e) = \{x : E,\ x \notin \varphi(x)\}$ alors $e \in \varphi(e) \Leftrightarrow e \notin \varphi(e)$ contradiction

Formalisation : la preuve a naturellement la structure suivante (d'après les règles $(\vdash\forall)$, $(\vdash\neg)$, $(\exists\vdash)$) :

| $E : Ens$ (declar)
| | $\exists \varphi : E \to \mathcal{P}(E),\ \varphi$ est bijective (hyp)
| | | $\varphi : E \to \mathcal{P}(E)$ (declar)
| | | φ est bijective (hyp)
| | | $\vdots$
| | | $\perp$
| | $\perp$ $(\exists\vdash)$
| $\neg(\exists \varphi : E \to \mathcal{P}(E),\ \varphi$ est bijective$)$ $(\vdash\neg)$

$\forall E : Ens,\ \neg(\exists \varphi : E \to \mathcal{P}(E),\ \varphi$ est bijective$)$ $(\vdash\forall)$

On développe la partie en suspens : la preuve d'une contradiction dans le contexte $E : Ens,\ \varphi : E \to \mathcal{P}(E),\ \varphi$ est bijective

D'après l'esquisse de preuve, c'est la surjectivité de φ qui conduit à une contradiction, précisément la partie $A = \{x : E,\ x \notin \varphi(x)\}$ n'est pas dans l'image de φ. On a besoin de la définition de A qu'on peut exprimer par un énoncé d'existence :

$\exists A : \mathcal{P}(E),\ \forall x : E,\ x \in A \Leftrightarrow x \notin \varphi(x)$ (ax)

cet énoncé est une spécialisation de l'axiome de séparation en théorie des ensembles : $\forall E : Ens,\ \exists A : \mathcal{P}(E),\ \forall x : E,\ x \in A \Leftrightarrow Q(x)$ (ax)
où Q est un énoncé dont x est variable libre

On remplace l'énoncé "φ est bijective" par l'énoncé plus faible "φ est surjective" dont la formalisation est $\forall A : \mathcal{P}(E),\ \exists a : E,\ \varphi(a) = A$

1 | $E : Ens,\ \varphi : E \to \mathcal{P}(E)$ (declar)
2 | φ est surjective (hyp)
3 | $\forall A : \mathcal{P}(E),\ \exists a : E,\ \varphi(a) = A$ ($\Leftrightarrow$ surj.) e2
4 | $\exists A : \mathcal{P}(E),\ \forall x : E,\ x \in A \Leftrightarrow x \notin \varphi(x)$ (ax)
5 | | $A : \mathcal{P}(E)$ (declar)
6 | | $\forall x : E,\ x \in A \Leftrightarrow x \notin \varphi(x)$ (hyp)
7 | | $\exists a : E,\ \varphi(a) = A$ $(\forall\vdash)$ e3
8 | | | $a : E$ (declar)
9 | | | $\varphi(a) = A$ (hyp)
10 | | | $a \in A \Leftrightarrow a \notin \varphi(a)$ $(\forall\vdash)$ e6
11 | | | $a \in A \Leftrightarrow a \notin A$ $(=)$ e9, e10
12 | | | $\perp$ (contrad.) e11
13 | | $\perp$ $(\exists\vdash)$ e7, e12
14 | $\perp$ $(\exists\vdash)$ e4, e13

Rq Cette preuve de l'énoncé $\forall E : Ens,\ \neg(\exists \varphi : E \to \mathcal{P}(E),\ \varphi$ est surjective$)$
est aussi une preuve de l'énoncé équivalent $\forall E : Ens,\ \forall \varphi : E \to \mathcal{P}(E),\ \neg\,\varphi$ est surj.

On a utilisé la macro-règle
| $P \Leftrightarrow \neg P$
| $\perp$ (contrad.)

dont voici la preuve avec les règles de la feuille 3 et les règles définissant $\Leftrightarrow$:

| $P \Leftrightarrow Q$
| $(P \Rightarrow Q)$ et $(Q \Rightarrow P)$ $(\Leftrightarrow\vdash)$

| $(P \Rightarrow Q)$ et $(Q \Rightarrow P)$
| $P \Leftrightarrow Q$ $(\vdash\Leftrightarrow)$

et l'axiome du tiers exclus P ou $\neg P$ (ax)

1 | $P \Leftrightarrow \neg P$
2 | $(P \Rightarrow \neg P)$ et $(\neg P \Rightarrow P)$ $(\Leftrightarrow\vdash)$
3 | P ou $\neg P$ (ax)
4 | | P (hyp)
5 | | $P \Rightarrow \neg P$ (et $\vdash$) e2
6 | | $\neg P$ (mp) e4,5
7 | | $\perp$ (contrad.) e4,6
8 | $P \Rightarrow \perp$ $(\vdash\Rightarrow)$ e4,7
9 | | $\neg P$ (hyp)
10 | | $\neg P \Rightarrow P$ (et $\vdash$) e2
11 | | P (mp) e9,10
12 | | $\perp$ (contrad.) e9,11
13 | $\neg P \Rightarrow \perp$ $(\vdash\Rightarrow)$ e9,12
14 | $\perp$ (ou $\vdash$) e3,8,13

(et $\vdash$) = (affaibl.)

Voici une preuve légèrement plus courte de la macro-règle, utilisant l'axiome (ax. 77) de la feuille 3 plutôt que l'axiome du tiers exclus (on peut montrer que ces deux axiomes sont équivalents)

1 | $P \Leftrightarrow \neg P$

2 | $(P \Rightarrow \neg P)$ et $(\neg P \Rightarrow P)$ ($\Leftrightarrow \vdash$) e1

| 3 | P (hyp)

| 4 | $P \Rightarrow \neg P$ (affaibl.) e2

| 5 | $\neg P$ (mp) e3,4

| 6 | $\perp$ (contrad. e3,5)

7 | $\neg P$ ($\vdash \neg$) e3,6

| 8 | $\neg P$ (hyp)

| 9 | $\neg P \Rightarrow P$ (affaibl. e2)

| 10 | P (mp) e8,9

| 11 | $\perp$ (contrad) e8,10

12 | $\neg\neg P$ ($\vdash \neg$) e8,11

13 | $\perp$ (contrad.) e7,12