ex 2 $\mathcal{P}(\{0,1\}) = \emptyset, \{0\}, \{1\}, \{0,1\}$

$\mathcal{P}(\emptyset) = \{\emptyset\}$

$\mathcal{P}(\mathcal{P}(\emptyset)) = \{\emptyset, \{\emptyset\}\}$

ex 3 On observe $\max\{n \in \mathbb{Z},\ n \leq x\} = -\min\{n \in \mathbb{Z},\ +n \geq -x\}$

$$= -\left(\min\{n \in \mathbb{N},\ n \geq -x + k\} - k\right) \text{ pour tout } k \in \mathbb{N} \text{ tq } k \geq x$$

ex 4 a $\# E \times F = \sum_{x \in E} \# p^{-1}(x)$ où $p : E \times F \to E$, $(x,y) \mapsto x$

$p^{-1}(x) = \{(x,y),\ y \in F\} \simeq F$ donc $\# p^{-1}(x) = \# F$

$\sum_{x \in E} \# p^{-1}(x) = \# F \sum_{x \in E} 1 = \# F \times \# E$

ex 5 a $E \simeq f(E) \subset F$ on est ramené à montrer que si F est fini alors toute partie de F est finie

On se ramène à $F = \{1, \dots, n\}$ $HR(n) : \forall A,\ A \subset \{1, \dots, n\} \Rightarrow \exists k \in \mathbb{N},\ A \simeq \{1, \dots, k\}$

$n = 0$ $F = \emptyset$; $A \subset F$ alors $A = \emptyset$ ok

Supposons le résultat vrai pour n

$A \subset \{1, \dots, n+1\}$ Si $n+1 \notin A$ alors $A \subset \{1, \dots, n\}$ et par $HR(n)$ A est fini

si $n+1 \in A$ on applique $HR(n)$ à $A \setminus \{n+1\}$: $\exists k \in \mathbb{N}$ et $\varphi : \{1, \dots, k\} \to A \setminus \{n+1\}$ bijective.

On prolonge $\varphi : \{1, \dots, k+1\} \to A$ en posant $\varphi(k+1) = n+1$

on une bijection

On peut adapter la preuve pour montrer que si $A \subsetneq \{1, \dots, n\}$ alors $\# A < n$