§5 ex 1 a $\quad$ A admet un plus petit élément $\Leftrightarrow \exists a : \mathbb{N}, \left(a \in A \text{ et } \forall x : \mathbb{N}, (x \in A \Rightarrow x \geqslant a)\right)$

ou plus simplement $\exists a \in A, \forall x \in A, x \geqslant a$

b avec le candidat 1 $\quad P(n) \equiv \forall A : \mathcal{P}(\mathbb{N}), (\exists k : \mathbb{N}, k \leqslant n \text{ et } k \in A) \Rightarrow$ A admet un plus petit élt

On note $Q(n)$ l'énoncé $\exists k : \mathbb{N}, k \leqslant n$ et $k \in A$

On montre d'abord $P(0)$: Soit donc A une partie de $\mathbb{N}$ et supposons $Q(0)$ vrai. Exactement $0 \in A$ (c'est le seul $k : \mathbb{N}$ inférieur ou égal à 0) et 0 est alors le plus petit élt de A

Supposons maintenant $P(n)$ vrai, montrons $P(n+1)$: Soit $A \subset \mathbb{N}$ et supposons $Q(n+1)$: $\exists k : \mathbb{N}$ $k \leqslant n+1$ et $k \in A$

Si $Q(n)$ est vrai alors A admet un plus petit élt d'après $P(n)$

Si $Q(n)$ est faux alors $n+1 \in A$ et c'est le plus petit élément de A (d'après $Q(n+1)$)

Dans les deux cas A admet un plus petit élt.

On a ainsi montré par récurrence $\forall n : \mathbb{N} \; P(n)$

Soit maintenant $A : \mathcal{P}(\mathbb{N})$ et on suppose $A \neq \emptyset$ donc $\exists n : \mathbb{N}, n \in A$ donc $Q(n)$ est vrai comme $P(n)$ est vrai on en déduit que A admet un plus petit élément.

ex2 a $\quad 1 = S0$, $2 = SS0$, $3 = SSS0$ par définition de 1, 2, 3

$$3 + (2+1) = SSS0 + (\underbrace{SS0 + S0}_{\underbrace{S(SS0+0)}_{SS0}}) = SSS0 + S(SS0) = S(\underbrace{SSS0 + SS0}_{\underbrace{S(SSS0 + S0)}_{\underbrace{S(SSS0+0)}_{SSS0}}}) = SSSSSS0 = 6$$

b Notons $P(m)$ l'énoncé $\forall n : \mathbb{N}, m + n = n + m$. On va prouver $P(m)$ par récurrence sur m.

$P(0)$: $\forall n : \mathbb{N}, 0 + n = \underbrace{n + 0}_{n}$. $\quad$ On va prouver $0 + n = n$ par récurrence sur n

$n = 0 \quad 0 + 0 = 0$ ok

Supposons $0 + n = n$ alors $0 + Sn = S(0+n) = S(n)$ d'où le résultat pour Sn

Conclusion : $\forall n : \mathbb{N}, 0 + n = n$

Supposons maintenant $P(m)$ vrai. Montrons $P(Sm)$: $\forall n : \mathbb{N}, Sm + n = n + Sm$. On va le prouver par récurrence sur n

$n = 0 \quad \underbrace{Sm + 0}_{Sm} \overset{?}{=} 0 + Sm$ oui d'après $P(0)$ spécialisé à $n = Sm$

Supposons $Sm + n = n + Sm$ et montrons $Sm + Sn = Sn + Sm$

$$Sm + Sn \underset{\substack{\uparrow \\ \text{par def de } +}}{=} S(Sm + n) \underset{\substack{\uparrow \\ \text{par hyp de rec.}}}{=} S(n + Sm) = SS(n+m)$$

$$Sn + Sm = S(Sn + m) \underset{\substack{\uparrow \\ \text{d'après } P(m) \text{ spécialisé à } n = Sn}}{=} S(m + Sn) = SS(m+n)$$

Or $m + n = n + m$ d'après $P(m)$ spécialisé à $n = n$

Conclusion : on a bien $P(Sm)$

Conclusion $P(m)$ est vrai pour tout m.