f5 ex 5

$$\begin{array}{l|l} 15 & 13 \\ \quad 20 & 1,\underline{153846}\ldots \\ \quad\;\; 70 & \\ \quad\;\;\; 50 & \\ \quad\;\;\; 110 & \\ \quad\;\;\;\;\; 60 & \\ \quad\;\;\;\;\;\; 80 & \\ \quad\;\;\;\;\;\; 2 & \end{array}$$

$x = 1,\underline{3691}\ldots$ alors $10^4 x = 13691 + (x-1)$ $\rightsquigarrow$ $x = \dfrac{13690}{9999}$ (forme irréductible)

$1,\underline{3691}\ldots - 3,\underline{14}\ldots = -2 + 0,\underline{3691}\ldots - 0,\underline{1414}\ldots = -2 + 0,\underline{2277}\ldots = -1 - (1 - 0,\underline{2277}\ldots) = -1 - 0,\underline{7722} = -1,\underline{7722}\ldots$

$0,\underline{9999}\ldots - 0,\underline{2277}\ldots = 0,\underline{7722}\ldots$

$1,\underline{3691}\ldots \times 3,\underline{14}\ldots$ $\rightsquigarrow$ période de longueur 396 d'après Wolfram Alpha

ex 9 σ : $1 \mapsto 9 \mapsto 4 \mapsto 2 \mapsto 1$ donc $\sigma = (1\,9\,4\,2)\,(3\,7)\,(5\,8\,6)$ décomposition en cycles.

$3 \mapsto 7 \mapsto 3$

$5 \mapsto 8 \mapsto 6 \mapsto 5$

$\sigma^n = (1942)^n\,(37)^n\,(586)^n$ car la composition de cycles <u>disjoints</u> est commutative

$\sigma^n = id \iff 4$ divise n et 2 divise n et 3 divise n

$\iff 12$ divise n $\qquad n = 12$ est le premier tel entier

σ^n a un point fixe $\iff (1942)^n$ a un pt fixe ou $(37)^n$ a un pt fixe ou $(586)^n$ a un pt fixe

$\iff 4 \backslash n$ ou $2 \backslash n$ ou $3 \backslash n$ $\qquad n = 2$ est le premier tel entier (et 3 comme 7 sont des points fixes de σ^2)

Réponses aux premières questions : soit σ un cycle de longueur n : $\sigma = (1\ \sigma(1)\ \ldots\ \sigma^{n-1}(1))$
on renumérote $1, \sigma(1), \ldots, \sigma^{n-1}(1)$ dans cet ordre de 1 à n : formellement on définit $\tau : \{1, \ldots, n\} \circlearrowleft$, $k \mapsto \sigma^{k-1}(1)$

alors $\sigma \circ \tau(i) = \tau(i+1)$ pour $1 \leq i < n$ donc $\tau^{-1} \circ \sigma \circ \tau = (1\ 2\ \ldots\ n)$. On observe $\tau^{-1} \circ \sigma^k \circ \tau = (\tau^{-1} \circ \sigma \circ \tau)^k : i \mapsto i + k \bmod n$

$\sigma \circ \tau(n) = \tau(1)$

$i + k = i \bmod n \iff n \backslash k$ auquel cas $i + n = i \bmod n\ \forall i$