L1 md   Corrigé du partiel du 25 mars 2016

ex 1

a $\forall x \in A$ doit être suivi d'un énoncé dont x n'est pas une variable liée (habituellement dont x est une variable libre) or $\Rightarrow x \in B$ n'est pas un énoncé

b $\Rightarrow$ doit se trouver entre deux énoncés. $A \cup B$ à droite de $\Rightarrow$ n'est pas un énoncé mais un ensemble (d'après $x \in A_i$ ...)

c correct

d x est libre à droite de $\forall x : \mathbb{R}$, ie dans $x \in [0, \pi] \Rightarrow \dots$ or x est lié dans $\int_0^\pi \cos(x)\,dx$ par la construction $\int$ donc conflit

ex 2

Comme l'application f est continue et comme $f(x_0) > 0$, $\underbrace{\text{il existe } \eta > 0 \text{ tel que } \underbrace{f(x) > 0 \text{ pour tout } x \text{ dans l'intervalle } [x_0 - \eta, x_0 + \eta]}_{\text{portée de } x}}_{\text{portée de } \eta}$.

Variables et constantes :

f, x_0 sont des variables libres ; leur portée déborde de l'extrait de texte

η, x sont liés (η par "il existe η", x par "pour tout x")

0 constante

Type : $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ (fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$) à cause de $f(x)$ avec x dans un intervalle et à cause de $f(x) > 0$

$x_0, x, \eta : \mathbb{R}$ à cause de $\eta > 0$, $x_0 - \eta$, x dans l'intervalle $[x_0 - \eta, x_0 + \eta]$

$0 : \mathbb{R}$

Expressions $f(x_0)$, $f(x)$ de type $\mathbb{R}$

$f(x_0) > 0$ de type énoncé, de même que $\eta > 0$, $f(x) > 0$

$x_0 - \eta$, de type $\mathbb{R}$, de même que $x_0 + \eta$

$[x_0 - \eta, x_0 + \eta]$ de type ensemble ou plus précisément $\mathcal{P}(\mathbb{R})$ (partie de $\mathbb{R}$)

ex 3.

$$\overline{A \Rightarrow B} = \overline{\neg(A \text{ et } \neg B)} = 1 + \overline{A \text{ et } \neg B} = 1 + \bar{A}(1 + \bar{B})$$

$$\overline{A \Leftrightarrow B} = \overline{A \Rightarrow B \text{ et } B \Rightarrow A} = \overline{A \Rightarrow B} \times \overline{B \Rightarrow A} = (1 + \bar{A}(1 + \bar{B}))(1 + \bar{B}(1 + \bar{A}))$$

$$= 1 + \bar{A} + \bar{B} + 3\bar{A}\bar{B} + \bar{A}^2\bar{B} + \bar{A}\bar{B}^2 + \bar{A}^2\bar{B}^2$$

$$= 1 + \bar{A} + \bar{B} + 6\bar{A}\bar{B} \quad \text{en utilisant } \bar{A}^2 = \bar{A},\ \bar{B}^2 = \bar{B} \text{ dans } \mathbb{F}_2$$

$$= 1 + \bar{A} + \bar{B} \quad \text{en utilisant } 2 = 0 \text{ dans } \mathbb{F}_2$$

ex 3 suite

$(\neg P \Rightarrow P) \Rightarrow P = 1 + (\overline{\neg P \Rightarrow P})(1+\bar{P})$ d'après $\overline{A \Rightarrow B}$

$= 1 + (1 + \overline{\neg P}(1+\bar{P}))(1+\bar{P})$

$= 1 + (1 + (1+\bar{P})^2)(1+\bar{P})$

$= 1 + (1+\bar{P}) + (1+\bar{P})^3$

$= 1$ car $f^2 = f$ donc $f^3 = f$ et $2f = 0$ dans $\mathbb{F}_2$

On en déduit $(\neg P \Rightarrow P) \Rightarrow P \equiv V$ quelle que soit la valeur de vérité de P

$(1+\bar{A})(1+\bar{B})(1+\bar{C}) = 0$ dès que $1+\bar{A}=0$ ou $1+\bar{B}=0$ ou $1+\bar{C}=0$ donc dès que $\bar{A}=1$ ou $\bar{B}=1$ ou $\bar{C}=1$

$= 1$ ssi $\bar{A} = \bar{B} = \bar{C} = 0$

donc $\bar{E} = 0$ ssi $\bar{A} = \bar{B} = \bar{C} = 0$

$E \equiv F$ ssi $A \equiv B \equiv C \equiv F$

ex 4 D'après la mise en forme (l'indentation) on prouve la ligne 8 sans hypothèse. La preuve établit que $((P \Rightarrow Q) \text{ et } \neg Q) \Rightarrow \neg P$ est une tautologie

$\ell 8$ se déduit de $\ell 1$ et $\ell 7$ par la règle $(\vdash \Rightarrow)$, $\ell 1$ est donc (hyp)
$\ell 7$ se déduit de $\ell 4$ et $\ell 6$ par $(\vdash \neg)$ $\ell 4$ est donc (hyp)
$\ell 6$ se déduit de $\ell 3$ et $\ell 5$ par (contradiction)
$\ell 5$ se déduit de $\ell 2$ et $\ell 4$ par (mp)
$\ell 2$ se déduit de $\ell 1$ par (affaibl.), de même que $\ell 3$

ex 5 $A \subset f^{-1}(f(A)) \Leftrightarrow \forall x, x \in A \Rightarrow x \in f^{-1}(f(A))$

$\Leftrightarrow \forall x, x \in A \Rightarrow (x \in E \text{ et } f(x) \in f(A))$

$\Leftrightarrow \forall x, x \in A \Rightarrow (x \in E \text{ et } \exists x', (x' \in A \text{ et } f(x') = f(x)))$

Soit alors $x \in A$. On a $x \in E$ car $A \subset E$. On a bien $\exists x', x' \in A$ et $f(x') = f(x)$: il suffit de prendre $x' = x$.

Donc l'affirmation à droite de $\Leftrightarrow$ est vrai donc celle à gauche également

Pour avoir $A = f^{-1}(f(A))$ il faudrait avoir l'implication réciproque : $\forall x, (x \in E \text{ et } \exists x', (x' \in A \text{ et } f(x') = f(x))) \Rightarrow x \in A$

Or il est facile de construire un contre exemple : $E = \{0,1\}$, $F = \{0\}$, $A = \{0\} \subset E$, f l'application forcément constante $E \to F$

$x = 1 \in E$ vérifie $x \in f^{-1}(f(A))$ mais $x \notin A$.