L1MD – examen du 3 mai 2016

Durée 2H. Tout document et matériel électronique interdit

1. L'énoncé suivant est il syntaxiquement correct ? Si ce n'est pas le cas, expliquer pourquoi.

$$\big(x \in A \text{ ou } x \in B\big) \Rightarrow A \cap B$$

Que dire de l'énoncé

$$x \in A \text{ ou } \big(x \in B \Rightarrow A \cap B = \emptyset\big)$$

2. Formaliser les énoncés suivants (dans les trois premiers énoncés E est une variable libre de type partie de $\mathbb{R}$ et dans les deux premiers a est une variable libre de type $\mathbb{R}$).

a. a est un majorant de E.

b. a est le plus grand élément de E.

c. E admet un plus grand élément.

d. Toute partie non vide de $\mathbb{Z}_-$ (les entiers négatifs ou nuls) admet un plus grand élément.

e. Pas toutes les parties non vides de $\mathbb{Z}$ admettent un plus grand élément.

f. Pour qu'une partie de $\mathbb{Z}$ admette un plus grand élément, il faut qu'elle soit non vide et majorée.

3. Soient $n \geq p > 0$ deux entiers et $a_1, \dots, a_p$ p-élements distincts de $\{1, \dots, n\}$. On note $(a_1\ a_2\ \dots\ a_p)$ la bijection de $\{1, \dots, n\}$ dans lui même définie par $a_1 \mapsto a_2$, $a_2 \mapsto a_3, \dots,$ $a_p \mapsto a_1$ et $k \mapsto k$ si $k \notin \{a_1, \dots, a_p\}$. On dit qu'une telle bijection est un cycle de longueur p.

a. Conbien y a t-il de cycles de longueur 3 parmi les bijections de $\{1, 2, 3\}$?

Conbien y a t-il de cycles de longueur 3 parmi les bijections de $\{1, \dots, 5\}$? On pourra considérer l'application qui à un cycle $(a_1\ a_2\ a_3)$ associe la partie $\{a_1\ a_2\ a_3\}$ de $\{1, \dots, 5\}$.

b. La bijection réciproque du cycle $(2\ 5\ 1\ 3)$ (considéré comme bijection de $\{1, \dots, 5\}$ dans lui même) est elle un cycle ? Si oui comment s'écrit il ?

c. On considère la composée de cycles de $\{1, \dots, 7\}$:

$$\sigma = (2\ 5\ 1\ 3) \circ (7\ 2\ 3\ 4)$$

Quelle est l'image de 3 par σ ? Quelle est l'orbite de 3 sous l'action de σ ? La bijection σ est elle un cycle ?

d. On note τ la composée $(2\ 5\ 1\ 3)(4\ 7\ 6)$. Quel est le plus petit entier $n > 0$ tel que τ^n soit l'application identité ?

4.a. Donner une forme fractionnaire ($\frac{p}{q}$ avec p, q entiers) du développent décimal périodique $3,\underline{15}....$

b. Donner la forme décimale périodique de $\frac{9}{14}$.

c. Calculer $3,\underline{15}... - 2,7\underline{26}...$ (détailler les calculs).

5. Soient A et B deux énoncés. Comparer les tables de vérité de "$(\neg A) \operatorname{ou} B$" et de "$\neg(A \operatorname{ou} B)$". Peut on écrire l'expression "$\neg A \operatorname{ou} B$" ?

6.1. A, B désignent deux énoncés. Pour que $A \Rightarrow B$ soit vrai,

a. faut il que A soit vrai ?

b. suffit il que A soit vrai ?

c. faut il que B soit vrai ?

d. suffit il que B soit vrai ?

e. faut il que A soit faux ?

f. suffit il que A soit faux ?

6.2 Un théorème bien connu dit que toute suite convergeante de nombres réels est majorée.

g. Pour qu'une suite de nombres réels soit majorée, faut il qu'elle converge ?

h. Pour qu'une suite de nombres réels soit majorée, suffit il qu'elle converge ?

i. Pour qu'une suite de nombres réels soit convergente, faut il qu'elle soit majorée ?

j. Pour qu'une suite de nombres réels soit convergente, suffit il qu'elle soit majorée ?

k. Faut il qu'une suite de nombres réels soit non majorée pour qu'elle ne converge pas ?

l. Suffit il qu'une suite de nombres réels soit non majorée pour qu'elle ne converge pas ?

6.3 On note (E) l'énoncé

$$(S\,\text{ou}\,R) \Rightarrow \Big(\big((Q \Rightarrow P) \Rightarrow (R \Rightarrow Q)\big)\,\text{ou}\,(R \Rightarrow P)\,\text{ou}\,(R \Rightarrow S)\Big)$$

où P, Q, R, S sont des variables de type énoncé.

m. Combien de lignes a la table de vérité de (E) comme fonction des valeurs de vérité de P, Q, R, S ?

n. On suppose dans cette question que R est vrai. Soit A un énoncé, à quelle formule simple en A équivaut $R \Rightarrow A$ au sens des tables de vérité ? A quelle formule simple en P, Q, S se réduit (E) ?

o. On suppose maintenant que R est faux. A quoi se réduit $R \Rightarrow A$ comme fonction de A ? Que peut on dire de la valeur de vérité de (E) ?

p. Pour quelles valeurs de vérité de P, Q, R, S a t-on (E) faux ?

q. Un enseignant fait lui-même le calcul algébrique dans $(\mathbb{F}_2, +, x)$ de (E) et trouve l'expression

$$\overline{R} + (1 + \overline{P})(1 + \overline{Q})(1 + \overline{S})$$

Ce calcul est il compatible avec votre réponse à la question (p) ?