L1MD – Feuille 1 **25 janv. 2016**

Variables libres, variables liées, constantes et leur type

1. Quelles sont les variables libres, les variables liées et les constantes dans les expressions ou énoncés suivants :

$$\forall f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f \text{ est borné}$$

$$\exists M \in \mathbb{R},\ \forall x \in \mathbb{R},\ |f(x)| \leq M$$

$$\forall t \in \mathbb{R},\ \sin(\pi - t) = \sin(t)$$

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{n}{n+1} = 1$$

$$\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$$

$$n! = \textstyle\prod_{i=1}^{n} i$$

* $\ln(1+x) \sim x$ au voisinage de 0.

2. Les énoncés suivants sont ils syntaxiquement corrects ?

$$\forall x \in \mathbb{R},\ \sin(x) = x$$

$$\forall x \in \mathbb{R},\ \exists x \in \mathbb{R},\ x = x$$

$$\forall x \in \mathbb{R},\ \textstyle\int_0^x \sin(x)dx > 0$$

$$\forall x \in \mathbb{R},\ \textstyle\int_0^1 \sin(x)dx > 0$$

$$\mathrm{E}(X) = \mathrm{P}(X = k) \times \textstyle\sum_{k=1}^{10} \frac{k}{2}$$

$$\big(\forall x \in \mathbb{R},\ \textstyle\int_0^x \sin(t)dt > 0\big) \text{ ou } \big(\exists y \in \mathbb{R},\ \textstyle\int_0^y \sin(x)dx > 0\big)$$

3. Identifier les variables libres ou liées dans les formules ou énoncés suivants et leur donner un type raisonnable.

Ex. $x^a + 2x + 1 \rightsquigarrow x : \mathbb{R}, a : \mathbb{N}$

$$\forall x, y \in I, \quad x < y \Rightarrow f(x) < f(y)$$

$$p \circ p = p$$

$$\forall n, u_{n+1} = \sqrt{u_n}$$

$$\det \begin{pmatrix} a\ b \\ c\ d \end{pmatrix} = ad - bc$$

$$(A \subset B \text{ et } B \subset C) \Rightarrow A \subset C$$

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{n^3 + 3n}{2 - 4n^3} = -\frac{1}{4}$$

$$f^{-1}(A \cap B) = f^{-1}(A) \cap f^{-1}(B)$$

$$\textstyle\int_a^b f'(t)dt = f(b) - f(a)$$

$$A \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 2 \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

$$\textstyle\int_a^b u'v = \big[uv\big]_a^b - \int_a^b uv'$$

Les trois exercices suivants sont extraits de la première feuille de TD du cours “Maths Discrètes 1” de L. Regnier (`http://iml.univ-mrs.fr/~regnier/enseignement/MD1`).

Exercice 1 Donner les types de tous les symboles et expressions utilisés dans les énoncés suivants :

- Soient a et b deux réels ; si $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ est continue et si $f(a) < 0$ et $f(b) > 0$ alors il existe $x_0 \in [a, b]$ tel que $f(x_0) = 0$.
- soient $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$; supposons que f est partout dérivable, que $f'(x) = 0$ pour tout x et qu'il existe x_0 tel que $f(x_0) = 0$; alors $f = 0$.
- Si X est un ensemble d'entiers naturels, alors X admet un plus petit élément x_0.
- Soit $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ une fonction sur les entiers. Il existe un entier n_0 tel que $f(n_0)$ est minimum, c'est à dire tel que pour tout n on a $f(n_0) \leq f(n)$.
- $\forall \epsilon > 0, \exists \alpha > 0, \forall x$ si $|x - x_0| < \alpha$ alors $|f(x) - f(x_0)| < \epsilon$

Exercice 3 Donner le type de chaque variable dans l'énoncé suivant :

Soit x une fonction sur h dérivable en f, il existe une fonction π sur $\mathbb{R}$ qui tend vers 0 en 0 et telle que $x(f + R) = x(f) + R.x'(f) + R.\pi(R)$ pour tout R tel que $f + R \in h$.

Exercice 4 Dans les énoncés suivant donner le statut de chaque variable (introduite dans l'énoncé ou pas), et donner la portée de chaque variable introduite.

i) Si n est un entier tel que $n = 2k$ pour un entier k alors n est pair.

ii) Il existe deux entiers q et r tels que $a = bq + r$ et $0 \leq r < b$.

iii) Le PGCD de a et b est l'entier d tel que : d divise a et b et $d' \leq d$ pour tout entier d' qui divise a et b.

iv) Si x est un réel positif non nul alors $x = nx'$ où n est un entier et x' un réel positif tel que $x' < 1$.

v) Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$, $x_0 \in I$ et f une fonction de I dans $\mathbb{R}$; on dit que f est continue en x_0 si pour tout $\epsilon > 0$, il existe $\alpha > 0$ tel que pour tout $x \in I$, si $|x - x_0| < \alpha$ alors $|f(x) - f(x_0)| < \epsilon$.

Formalisation - traduction

4. Formaliser les énoncés qui suivent :

1. L'équation $x^2 + x + 1 = 0$ n'a pas de solution dans $\mathbb{R}$.
2. L'application $x \mapsto 1 + x + x^3$ s'annule sur l'intervalle $[-1, 0]$.
3. Les applications $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ne sont pas toutes injectives.
4. La fonction ln n'est pas majorée sur $]0, +\infty[$.
5. Les solutions complexes de l'équation $x^3 + x + 1 = 0$ sont conjuguées.
6. Tout nombre réel admet une unique partie entière.
7. Le produit de deux nombres réels est négatifs si et seulement si les nombres sont de signe opposé.
8. L'ensemble E est un intervalle de $\mathbb{R}$.
9. L'intersection de deux intervalles de $\mathbb{R}$ est un intervalle.