L1MD – Feuille 2 22 fev. 2016

Calcul propositionnel

1. Réécrire (pour la logique classique) chacun des énoncés suivants avec chacune des listes d'opérations et quantificateurs indiquées ($\neg$ signifie 'non') :

1. P ou $\neg P$ avec ($\neg$, et) puis ($\neg, \Rightarrow$)
2. $(\neg P \Rightarrow P) \Rightarrow P$ avec ($\neg$, et) puis ($\neg$, ou)
3. $\exists x,\ P(x) \Rightarrow Q(x)$ avec ($\forall, \neg$, et)

2. *(Examen et Session 2 juin 2015)* Quelle est la table de vérité de l'énoncé

$$Q \text{ et } (P \Rightarrow Q)$$

en fonction des valeurs de vérités de P et de Q ? De quelle formule simple en P et Q reconnaît on la table de vérité ?

Mêmes questions avec les énoncés P et $(P \Rightarrow Q)$, $\neg P$ et $(P \Rightarrow Q)$.

3. *(Session 2 juin 2015)* On veut connaître la valeur de vérité de l'énoncé

$$(E) \qquad \big((Q \Rightarrow P) \Rightarrow (R \Rightarrow Q)\big) \text{ ou } (P \Rightarrow R)$$

en fonction des valeurs de vérité de P, Q, R (*i.e.* la table de vérité de (E)).

a. Expliquer le raisonnement suivant :

"Pour que (E) soit faux il faut que P soit vrai et que R soit faux."

b. Qu'en déduit on sur la table de vérité de (E) ?

4. Qu'appelle t-on la contraposée de $A \Rightarrow B$? Quelle est la négation de $A \Rightarrow B$?

Donner la contraposée et la négation des assertions suivantes :

1. Je partirai en vacance si je réussis mon examen.
2. Cette année je prendrai un abonnement à l'opéra à condition que la programmation me plaise et que le tarif soit raisonnable.
3. Pour que je parte en vacances il faut que je sois pris comme moniteur dans une colonie ou bien que Paul me propose de venir avec lui dans sa maison de campagne.

5. Les énoncés suivants sont ils des tautologies ? Justifier par une argumentation aussi courte que possible (table de vérité, réécriture, distinguer suivant les valeurs d'une variable, etc.).

$$P \text{ ou } \neg P\ , \qquad (\neg P \Rightarrow P) \Rightarrow P\ , \qquad (P \Rightarrow \neg P) \text{ ou } P\ , \qquad ((P \Rightarrow Q) \text{ et } \neg Q) \Rightarrow \neg P$$

$$\neg(P \text{ ou } Q) \Leftrightarrow (\neg P \text{ ou } \neg Q)\ , \qquad \text{Faux} \Leftrightarrow (P \text{ et } \neg P)\ , \qquad \neg(P \text{ et } Q) \Leftrightarrow (\neg P \text{ ou } \neg Q)$$

$$((P \Rightarrow Q) \text{ et } (Q \Rightarrow R)) \Rightarrow (P \Rightarrow R)$$

Que disent ces énoncés ?

6. A un énoncé P on associe le nombre $\overline{P}$ de $(\mathbb{F}_2, +, \times)$ suivant les règles $\overline{V} = 1$, $\overline{\neg P} = 1 - \overline{P}$, $\overline{P \text{ et } Q} = \overline{P} \times \overline{Q}$.

Comment s'expriment $\overline{P \text{ ou } Q}$, $\overline{P \Rightarrow Q}$, $\overline{P \Leftrightarrow Q}$ en fonction de $\overline{P}$ et $\overline{Q}$?

Donner les expressions algébriques dans $(\mathbb{F}_2, +, \times)$ des énoncés du précédent exercice puis développer et simplifier. Retrouve t-on que les énoncés sont des tautologies ou ne le sont pas ?

7. Pour chacune des tables de vérité ci-dessous trouver un énoncé compatible aussi simple que possible, formé avec les variables P,Q,R (de type énoncé) et avec les connecteurs logiques habituels (non, et, ou, $\Rightarrow$, $\Leftrightarrow$). Reformuler ensuite l'énoncé avec les seuls connecteurs $\neg$ (non) et $\vee$ (ou).

P	Q	
V	V	F
V	F	V
F	V	V
F	F	V

P	Q	R	
V	V	V	V
V	V	F	V
V	F	V	F
V	F	F	V
F	V	V	V
F	V	F	F
F	F	V	V
F	F	F	V

8. *(Partiel mars 2015)* Donner la table de vérité des énoncés suivants suivant les valeurs de vérité de A, B, C, en détaillant les calculs (en détaillant la table) ou en argumentant.

(a) $(A \Leftrightarrow B) \Rightarrow (A \text{ ou } B)$

(b) $(A \text{ ou } B) \Rightarrow \big((C \Rightarrow A) \text{ ou } (C \Rightarrow B)\big)$

Quelle est la négation de (b) ?

9. *(Partiel mars 2015)* On note $\overline{A}$ l'expression algébrique dans $(\mathbb{F}_2, +, \times)$ d'un énoncé A. On rappelle qu'on a $\overline{\neg A} = 1 + \overline{A}$ et $\overline{A \text{ et } B} = \overline{A} \times \overline{B}$.

Exprimer $\overline{A \text{ ou } B}$ et $\overline{A \Rightarrow B}$ en détaillant les calculs puis $\overline{(A \text{ ou } B) \Rightarrow \big((C \Rightarrow A) \text{ ou } (C \Rightarrow B)\big)}$. Qu'obtient on après simplification ? Est-ce compatible avec la table de vérité de la question 8b ci-dessus ?