L1MD – Feuille 3 **7 mars 2016**

Preuves – type ensemble

1. Le texte qui suit est une [esquisse de] preuve formelle sans mention des règles appliquées. Que prouve t-on et sous quelles hypothèses ? Quelle est pour chaque énoncé la règle appliquée (voir la liste des règles plus bas) ? Quels sont les énoncés sans preuve ? Sont ils des théorèmes classiques ?

1 $a : \mathbb{R}$

  2 $a = 2$

  3 $4(-\frac{1}{2}) + 2 = 0$

  4 $\exists x : \mathbb{R},\ 4x + 2 = 0$

    5 $x : \mathbb{R}$

    6 $(2-a)x^2 + 4x + a = 4x + 2$

  7 $\forall x : \mathbb{R},\ (2-a)x^2 + 4x + a = 4x + 2$

  8 $\exists x : \mathbb{R},\ (2-a)x^2 + 4x + a = 0$

  9 $a \neq 2$

  10 $\forall \alpha, \beta, \gamma : \mathbb{R},\ \big(\alpha \neq 0 \,\mathrm{et}\, \beta^2 - 4\alpha\gamma \geq 0\big) \Rightarrow \exists x : \mathbb{R},\ \alpha x^2 + \beta x + \gamma = 0$

  11 $\big(2 - a \neq 0 \,\mathrm{et}\, 4^2 - 4(2-a)a \geq 0\big) \Rightarrow \exists x : \mathbb{R},\ (2-a)x^2 + 4x + a = 0$

  12 $2 - a \neq 0$

  13 $4^2 - 4(2-a)a \geq 0$

  14 $2 - a \neq 0 \,\mathrm{et}\, 4^2 - 4(2-a)a \geq 0$

  15 $\exists x : \mathbb{R},\ (2-a)x^2 + 4x + a = 0$

16 $\exists x : \mathbb{R},\ (2-a)x^2 + 4x + a = 0$

17 $\forall a : \mathbb{R},\ \exists x : \mathbb{R},\ (2-a)x^2 + 4x + a = 0$

Liste des règles (la dernière ligne se déduit de celles qui précèdent par la règle ainsi nommée).

| A (hyp.)
| $\cdots$
| B
$A \Rightarrow B$ $(\vdash\Rightarrow)$

$A \Rightarrow B$
A
B (mp)

A
A
(répétition)

$A \,\mathrm{et}\, B$
A (affaibl.)

A
B
$A \,\mathrm{et}\, B$ $(\vdash$ *et*$)$

A
$A \,\mathrm{ou}\, B$ (affaibl.)

$A \,\mathrm{ou}\, B$
$A \Rightarrow C$
$B \Rightarrow C$
C (ou $\vdash$)

A
$\neg A$
$\perp$ (contradict.)

$A \Rightarrow \perp$
$\neg A$ $(\vdash \neg)$

| $x : \mathcal{T}$ (declar)
| $\cdots$
| P(x)
$\forall x : \mathcal{T},\ P(x)$ $(\vdash \forall)$

$\forall x : \mathcal{T},\ P(x)$
$t : \mathcal{T}$
$P(t)$ $(\forall \vdash)[t]$

$t : \mathcal{T}$
$P(t)$
$\exists x : \mathcal{T},\ P(x)$ $(\vdash \exists)$

$\exists x : \mathcal{T},\ P(x)$
| $x : \mathcal{T}$ (declar)
| $P(x)$ (hyp.)
| $\cdots$
| A
A $(\exists \vdash)$

Réécritures (macro-règles) :

$t = t'$
$f(t) = f(t')$ $(=)$

$t = t'$
$P(t)$
$P(t')$ $(=)$

$\forall x : \mathcal{T},\ P(x) \Leftrightarrow Q(x)$
$\forall x : \mathcal{T},\ P(x)$
$\forall x : \mathcal{T},\ Q(x)$ $(\Leftrightarrow)$

$\forall x : \mathcal{T},\ P(x) \Leftrightarrow Q(x)$
$\exists x : \mathcal{T},\ P(x)$
$\exists x : \mathcal{T},\ Q(x)$ $(\Leftrightarrow)$

Distinguer suivant une hypothèse H (macro-règles) :

| | H (hyp.)
| | $\cdots$
| | A
| | $\neg H$ (hyp.)
| | $\cdots$
| | A
| A (disting. H)

Règles sans prémisses (définition, axiome (logique ou spécifique à un type) dont on donne le nom, théorème classique dont on donne le nom à défaut d'une preuve)

| $\forall x,\ x =$<expr>$\Leftrightarrow P(x)$ (def <expr>) | $\neg\neg A \Rightarrow A$ (ax.$\neg\neg$) | $\forall x,\ x = x$ $(ax. =)$

| A (ax. <nom>) | A (thm <nom>)

Les énoncés qui ne résultent pas d'une des règles ci-dessus peuvent soit résulter de l'application d'une macro-règle hors liste, soit correspondre à l'introduction d'une variable avec son type (cf règles ($\vdash \forall$), ($\vdash \exists$), ($\exists \vdash$)), soit correspondre à l'introduction d'une hypothèse additionnelle (cf règle ($\vdash\Rightarrow$), ($\exists \vdash$), (disting. H)),

| $x : \mathcal{T}$ (declar) | A (hyp.)

soit être un énoncé non prouvé (résultat d'un calcul algébrique simple, énoncé en attente de preuve, faille dans la preuve).

| A (non prouvé)

2. On veut montrer qu'un ensemble n'est jamais en bijection avec l'ensemble de ses parties.Transformer le scénario de preuve ci-dessous en preuve formelle :

"Supposons l'existence d'une bijection φ entre un ensemble E et l'ensemble de ses parties. Les éléments de E n'appartenant pas à leur image par φ forment une partie de E, image par φ d'un élement e de E. On observe que l'énoncé $e \in \varphi(e)$ est équivalent à sa négation ce qui conduit à une contradiction."

3. Donner la définition des expressions ci-dessous suivant le modèle :

$\{x : \mathcal{T},\ P(x)\}\ :\quad \forall y : \mathcal{T},\ y \in \{x : \mathcal{T},\ P(x)\}\ \Leftrightarrow\ P(y)$

$A \cap B$ (l'intersection des ensembles A et B)
$A \cup B$ (l'union des ensembles A et B)
$E \setminus A$ pour A une partie de l'ensemble E
$\mathcal{P}(E)$ (l'ensemble des parties de l'ensemble E)
$f(A)$ pour $f : E \to F$ une application et A une partie de E
$f^{-1}(B)$ pour $f : E \to F$ une application et B une partie de F

4. Prouver :

$E \setminus (A \cup B) = (E \setminus A) \cap (E \setminus B)$ pour A, B deux parties de E
$E \setminus (A \cap B) = (E \setminus A) \cup (E \setminus B)$
$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$
$f^{-1}(A \cup B) = f^{-1}(A) \cup f^{-1}(B)$ pour $f : E \to F$ une application et A, B deux parties de F
$f^{-1}(A \cap B) = f^{-1}(A) \cap f^{-1}(B)$

A t-on $f(A \cup B) = f(A) \cup f(B)$, $f(A \cap B) = f(A) \cap f(B)$ pour $f : E \to F$ application et A, B deux parties de E ?