L1MD – Feuille 4 **21 mars 2016**

Ensembles, dénombrement

1. L'ensemble vide $\emptyset$ est défini par l'un ou l'autre des énoncés équivalents suivants :

$$\forall x,\ x \in \emptyset \Leftrightarrow \perp$$

$$\forall x, x \notin \emptyset$$

Donner une preuve formelle (en utilisant les règles du document de cours ou de la feuille 3) du fait que pour tout ensemble E on a $\emptyset \subset E$, soit en utilisant la contraposée de l'implication dans la définition de l'inclusion, soit en raisonnant par l'absurde (on prouvera au passage le théorème logique $\perp \Rightarrow A$ où A est un énoncé).

2. Donner la liste des éléments de $\mathcal{P}(\{0,1\})$ puis de $\mathcal{P}(\emptyset)$, $\mathcal{P}(\mathcal{P}(\emptyset))$.

3. On note E l'application qui à un réel x associe sa partie entière (le plus grand entier $n \in \mathbb{Z}$ tel que $n \leq x$).

En utilisant l'axiome $\forall x : \mathbb{R}, \exists n : \mathbb{N},\ n \geq x$ et le théorème "toute partie non vide de $\mathbb{N}$ admet un plus petit élément", prouver (informellement) que $\mathrm{E}(x)$ est bien défini pour tout réel x.

Expliciter l'image par E de l'intervalle $]-3,4[$ puis l'image réciproque par E de l'ensemble $\{n : \mathbb{N}, -3 < n < 4\}$.

4. On note $\#E$ le cardinal d'un ensemble fini E. On retient le résultat suivant : Soient E, F des ensembles finis et $f : E \to F$ une application ; alors

$$\#E = \sum_{y \in F} \#f^{-1}(y)$$

Montrer (informellement) avec ce résultat que

(a) $\#(E \times F) = \#E \times \#F$ (considérer l'application 1ère coordonnée $E \times F \to E$).

(b) $\#(F^E) = \#F^{\#E}$ (fixer $e \in E$, considérer l'application $F^E \to F, f \mapsto f(e)$ et raisonner par récurrence sur $\#E$)

5. Soient E, F deux ensembles et $f : E \to F$ une application. Donner une preuve informelle de

a. Si f est injective et F est fini alors E est fini (raisonner par récurrence sur $\#F$). Si de plus $\#E = \#F$ alors f est bijective.

b. si f est surjective et E est fini alors F est fini. Si de plus $\#E = \#F$ alors f est bijective.

c. S'il existe une injection de E dans F et une surjection de E dans F et si l'un des ensembles E, F est fini alors $\#E = \#F$.

6. Soit E un ensemble. A une partie A de E on associe l'application $\chi_A : E \to \{0,1\}$, $x \mapsto 1$ si $x \in A$, $x \mapsto 0$ si $x \notin A$. (χ_A est souvent notée $\mathbb{1}_A$ en probabilités). Montrer que l'application $\mathcal{P}(E) \to \{0,1\}^E$, $A \mapsto \chi_A$ est une bijection en exhibant l'application réciproque. Qu'en déduit on sur le cardinal de $\mathcal{P}(E)$ lorsque E est fini ?