L1MD – Feuille 5 **13 avril 2016**

Raisonnements et calculs avec le type entier, nombres rationnels, bijections, permutations

On rappelle les données du type $\mathbb{N}$, les principes de raisonnement par récurrence et de définition par récurrence :

Constantes $\mathbb{N} : \mathcal{E}\mathrm{ns}$, $0 : \mathbb{N}$, $S : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$
Axiome : S est injective d'image $\mathbb{N} \setminus \{0\}$

$S(n)$ correspond à $n+1$, cf ex. 2. La constante 1 désigne $S0$, 2 désigne $SS1$, etc. (On note Sn plutôt que $S(n)$ s'il n'y a pas d'ambiguité)

Règle de raisonnement par récurrence (où $P(n)$ désigne un énoncé dont n est une variable libre) :

1 | $P(0)$
2 | $\forall n : \mathbb{N},\ P(n) \Rightarrow P(S(n))$
3 | $\forall n : \mathbb{N},\ P(n)$ (rec) l1, l2

Défintion par récurrence : Soient $\mathcal{T}$ un type d'objet, $a : \mathcal{T}$ et $\varphi : \mathbb{N} \times \mathcal{T} \to \mathcal{T}$. On définit une application $f : \mathbb{N} \to \mathcal{T}$ par récurrence par la donnée des énoncés $f(0) = a$ et $\forall n : \mathbb{N},\ f(S(n)) = \varphi(n, f(n))$. Un axiome (cf axiome du choix dénombrable) donne l'existence d'un tel f. On montre par récurrence l'unicité d'un tel f.

1. On veut prouver (informellement) l'énoncé suivant sur les sous-ensembles de $\mathbb{N}$:

$$(E) \quad \forall A : \mathcal{P}(\mathbb{N}),\ A \neq \emptyset \Rightarrow A \text{ admet un plus petit élement}$$

a. Formaliser "A admet un plus petit élement"

b. Comme pour beaucoup d'énoncés en rapport avec $\mathbb{N}$ on cherche à prouver (E) par récurrence. On cherche donc un énoncé $P(n)$ tel qu'on sache prouver les trois énoncés

$\big(\forall n : \mathbb{N},\ P(n)\big) \Rightarrow (E)$
$P(0)$
$\forall n : \mathbb{N}$, P(n)$\Rightarrow P(n+1)$

Essayer les candidats suivants pour $P(n)$ ($\#A$ désigne le cardinal de A) :

1. $\forall A : \mathcal{P}(\mathbb{N}),\ \big(\exists k : \mathbb{N},\ k \leq n \text{ et } k \in A\big) \ \Rightarrow\ A$ admet un plus petit élement
2. $\forall A : \mathcal{P}(\mathbb{N}),\ \#A = n \Rightarrow A$ admet un plus petit élement
3. $\forall A : \mathcal{P}(\mathbb{N}),\ n \in A \Rightarrow A$ admet un plus petit élement

2. Pour $m, n : \mathbb{N}$ on définit $m + n$ par récurrence sur n par $m + 0 = m$ et $m + S(n) = S(m + n)$.

a. Calculer $3 + (2 + 1)$ et $(3 + 2) + 1$

b. Prouver (par récurrence) l'énoncé $\forall m, n : \mathbb{N},\ m + n = n + m$. Pouvez vous en donner une preuve formelle ?

3. La relation $\leq$ sur $\mathbb{N}$ est la relation d'ordre engendrée par les relations $n \leq n + 1$ pour tout n.

Montrer qu'on a $m \leq n$ si et seulement si n s'écrit $m + k$ pour un $k : \mathbb{N}$.

Montrer que la relation d'ordre $\leq$ est totale ($\forall m, n : \mathbb{N},\ m \leq n$ ou $n \leq m$).

4. Soit $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ une application. Montrer que les deux énoncés suivants sont équivalents :

$\forall n : \mathbb{N},\ f(n+1) \geq f(n)$

$\forall m, n : \mathbb{N},\ m \leq n \Rightarrow f(m) \leq f(n)$

5. Expliciter le développement décimal périodique de $\frac{15}{13}$.

Donner la forme fractionnaire ($\frac{a}{b}$ avec a, b entier) de $1,\underline{3691}...$

Donner la représentation décimale de $1,\underline{3691}... - 3,\underline{14}...$ et de $1,\underline{3691}... \times 3,\underline{14}...$

Question ouverte : Y a t-il une formule simple donnant la longueur de la période dans le développement décimal de $\frac{a}{b}$ en fonction de a et de b ? Quelle information a t-on sur cette longueur ?

Bijections

6. Pouvez vous exhiber une bijection entre les ensembles suivants :

1. L'intervalle $]0, 1[$ et $\mathbb{R}$?
2. $\mathbb{N}$ et $\mathbb{N} \setminus \{0\}$?
3. $\mathbb{R}$ et $\mathbb{R}_+$?

7. Soient k, n deux entiers. Expliciter une bijection entre l'ensemble des applications strictement croissantes de $\{1, \ldots, k\}$ dans $\{1, \ldots, n\}$ et les parties à k éléments de $\{1, \ldots, n\}$.

Qu'en déduit on sur le nombre d'applications strictement croissantes de $\{1, \ldots, k\}$ dans $\{1, \ldots, n\}$?

8. On note A l'ensemble des applications croissantes au sens large de $\{1, \ldots, k\}$ dans $\{1, \ldots, n\}$, B l'ensemble des applications strictement croissantes de $\{1, \ldots, k\}$ dans $\mathbb{N}$. Montrer que l'application $A \to B,\ f \mapsto (x \mapsto f(x) + x - 1)$ est injective. Quelle est son image ? Qu'en déduit on sur le cardinal de l'ensemble de départ ?

Permutations

9. Soit σ une permutation de $\{1, \ldots, n\}$ qui est un cycle de longueur n. Trouver une permutation τ telle que l'application composée $\tau \circ \sigma \circ \tau^{-1}$ soit le cycle $(1\ 2\ \ldots\ n)$ (qui désigne $1 \mapsto 2$, $2 \mapsto 3, \ldots$, $n \mapsto 1$). Montrer que σ^k ($= \sigma \circ \ldots \circ \sigma$ k-fois) a un point fixe si et seulement si σ^k est l'identité. Quel est le premier $k \geq 1$ tel que σ^k soit l'identité ?

Soit maintenant σ la permutation de $\{1, \ldots, 9\}$ donnée par

$$(\sigma(1), \ldots, \sigma(9)) = (9, 1, 7, 2, 8, 5, 3, 6, 4)\ .$$

Donner la décomposition en cycles de σ.

Quel est le premier $k \geq 1$ tel que σ^k a un point fixe ? Quel est le premier $k \geq 1$ tel que σ^k soit l'identité ?