L1MD – Partiel du 25 mars 2016

Durée 1H. Tout document et matériel électronique interdit

1. Les énoncés suivants sont ils syntaxiquement corrects ? Si ce n'est pas le cas, expliquer pourquoi.

a. $\forall x \in A \Leftrightarrow x \in B$.

b. $x \in A$ ou $x \in B \Rightarrow A \cup B$.

c. $(\exists a : \mathbb{R},\ \int_0^a f(t)dt > 0) \Rightarrow (\exists x : \mathbb{R},\ f(x) > 0)$.

d. $\forall x : \mathbb{R}, x \in [0, \pi] \Rightarrow \int_0^\pi \cos(x)dx > 0$

2. On lit l'extrait de texte suivant :

"Comme l'application f est continue et comme $f(x_0) > 0$, il existe $\eta > 0$ tel que $f(x) > 0$ pour tout x dans l'intervalle $[x_0 - \eta, x_0 + \eta]$."

Quelles sont les variables libres, liées et les constantes de l'énoncé ? Quelle est la portée des variables liées (on pourra dessiner cette portée). Quel est le type (raisonnable s'il n'est pas explicite) des variables et des constantes ? Quelles expressions apparaissent dans le texte ? Quelles sont leur type ?

3. On note $\overline{A}$ l'expression algébrique dans $(\mathbb{F}_2, +, \times)$ d'un énoncé A. On rappelle qu'on a $\overline{\neg A} = 1 + \overline{A}$ et $\overline{A \,\mathrm{et}\, B} = \overline{A} \times \overline{B}$.

Exprimer $\overline{A \Rightarrow B}$ et $\overline{A \Leftrightarrow B}$ en détaillant les calculs.

Calculer $\overline{(\neg P \Rightarrow P) \Rightarrow P}$. Qu'en déduit on sur la table de vérité de l'énoncé ?

Soit E l'énoncé $((B \Rightarrow A) \,\mathrm{et}\, (C \Rightarrow B)) \Rightarrow (A \,\mathrm{ou}\, B)$. Le calcul algébrique de $\overline{E}$ en fonction de $\overline{A}, \overline{B}, \overline{C}$ donne $\overline{E} = 1 + (1 + \overline{A})(1 + \overline{B})(1 + \overline{C})$. Qu'en déduit on sur la table de vérité de E ?

4. Voici la preuve formelle (sans mention des règles appliquées) d'un théorème logique (les lettres P, Q représentent des énoncés). Que prouve t-on ? Sous quelles hypothèses ? Qu'en déduit on en terme de tables de vérité ? Quelles sont les règles utilisées permettant d'écrire chacune des lignes parmi les règles explicitées au verso de la feuille ?

$$
\begin{array}{r|l}
1 & (P \Rightarrow Q)\ \mathrm{et}\ \neg Q \\
2 & P \Rightarrow Q \\
3 & \neg Q \\
 & \begin{array}{r|l} 4 & P \\ 5 & Q \\ 6 & \bot \end{array} \\
7 & \neg P
\end{array}
$$

$$
8 \quad \big((P \Rightarrow Q)\ \mathrm{et}\ \neg Q\big) \Rightarrow \neg P
$$

5. Soient E, F deux ensembles, $f : E \to F$ une application et A un sous-ensemble de E. Donner une preuve (informelle) de l'énoncé $A \subset f^{-1}(f(A))$ en raisonnant par équivalence et en utilisant les définitions :

$\forall x,\ x \in f^{-1}(B) \Leftrightarrow x \in E \,\mathrm{et}\, f(x) \in B$ (pour B une partie de F),

$\forall y,\ y \in f(A) \Leftrightarrow \exists x, x \in A \,\mathrm{et}\, f(x) = y$ (pour A une partie de E).

Pouvez vous prouver l'égalité $A = f^{-1}(f(A))$?

Liste des règles (la dernière ligne se déduit de celles qui précèdent par la règle ainsi nommée). Dans ce qui suit, les lettres $A, B, \ldots$ désignent des énoncés, $P(x), Q(x)$ désignent des propriétés de x (énoncés dont x est une variable libre) ; t désigne une expression de type $\mathcal{T}$.

$$\begin{array}{|l} \begin{array}{|l} A \quad (\text{hyp. }) \\ \cdots \\ \text{B} \end{array} \\ A \Rightarrow B \quad (\vdash\Rightarrow) \end{array} \qquad \begin{array}{|l} A \Rightarrow B \\ A \\ B \quad (\text{mp}) \end{array} \qquad \begin{array}{|l} A \\ A \quad (\text{répét}) \end{array} \qquad \begin{array}{|l} A \,\text{et}\, B \\ A \quad (\text{affaibl.}) \end{array} \qquad \begin{array}{|l} A \,\text{et}\, B \\ B \quad (\text{affaibl.}) \end{array}$$

$$\begin{array}{|l} A \\ B \\ A \,\text{et}\, B \quad (\vdash et) \end{array} \qquad \begin{array}{|l} A \\ A \,\text{ou}\, B \quad (\text{affaibl.}) \end{array} \qquad \begin{array}{|l} B \\ A \,\text{ou}\, B \quad (\text{affaibl.}) \end{array} \qquad \begin{array}{|l} A \,\text{ou}\, B \\ A \Rightarrow C \\ B \Rightarrow C \\ C \qquad (\,\text{ou} \vdash) \end{array}$$

$$\begin{array}{|l} A \\ \neg A \\ \perp \quad (\text{contradict.}) \end{array} \qquad \begin{array}{|l} \begin{array}{|l} A \quad (\text{hyp. }) \\ \cdots \\ \perp \end{array} \\ \neg A \quad (\vdash \neg) \end{array} \qquad \begin{array}{|l} \begin{array}{|l} x : \mathcal{T} \quad (\text{declar}) \\ \cdots \\ \text{P(x)} \end{array} \\ \forall x : \mathcal{T},\ P(x) \quad (\vdash \forall) \end{array} \qquad \begin{array}{|l} \forall x : \mathcal{T},\ P(x) \\ P(t) \qquad (\forall \vdash)[t] \end{array}$$

$$\begin{array}{|l} P(t) \\ \exists x : \mathcal{T},\ P(x) \quad (\vdash \exists)[t] \end{array} \qquad \begin{array}{|l} \exists x : \mathcal{T},\ P(x) \\ \quad \begin{array}{|l} x : \mathcal{T} \quad (\text{declar}) \\ P(x) \quad (\text{hyp. }) \\ \cdots \\ \text{A} \end{array} \\ A \qquad (\exists \vdash) \end{array}$$

Equivalences :

$$\begin{array}{|l} A \Rightarrow B \\ B \Rightarrow A \\ A \Leftrightarrow B \quad (\vdash\Leftrightarrow) \end{array} \qquad \begin{array}{|l} \forall x : \mathcal{T},\ P(x) \Leftrightarrow Q(x) \\ P(t) \\ Q(t) \quad (\Leftrightarrow) \end{array} \qquad \begin{array}{|l} \forall x : \mathcal{T},\ P(x) \Leftrightarrow Q(x) \\ Q(t) \\ P(t) \quad (\Leftrightarrow) \end{array}$$

Egalités :

$$\begin{array}{|l} t = t' \\ P(t) \\ P(t') \quad (=) \end{array}$$

Règles sans prémisses (définition, axiome (logique ou spécifique à un type) dont on donne le nom, théorème classique dont on donne le nom à défaut d'une preuve)

$$\begin{array}{|l} \forall x : \mathcal{T},\ x = \text{<expr>} \Leftrightarrow P(x) \quad (\text{def <expr>}) \end{array} \qquad \begin{array}{|l} \forall x : \mathcal{T},\ P(x) \Leftrightarrow Q(x) \quad (\text{def } P) \end{array}$$

$$\begin{array}{|l} \neg\neg A \Rightarrow A \quad (\text{ax.}\neg\neg) \end{array} \qquad \begin{array}{|l} \forall x,\ x = x \quad (ax. =) \end{array}$$

$$\begin{array}{|l} A \quad (\text{ax. <nom>}) \end{array} \qquad \begin{array}{|l} A \quad (\text{thm <nom>}) \end{array}$$

Les énoncés qui ne résultent pas d'une des règles ci-dessus peuvent soit résulter de l'application d'une macro-règle hors liste, soit correspondre à l'introduction d'une variable avec son type (cf règles $(\vdash \forall)$, $(\vdash \exists)$, $(\exists \vdash)$), soit correspondre à l'introduction d'une hypothèse additionnelle (cf règle $(\vdash\Rightarrow)$, $(\exists \vdash)$),

$$\begin{array}{|l} x : \mathcal{T} \quad (\text{declar}) \end{array} \qquad \begin{array}{|l} A \quad (\text{hyp. }) \end{array}$$

soit être un énoncé non prouvé (résultat d'un calcul algébrique simple, énoncé en attente de preuve, faille dans la preuve).

$$\begin{array}{|l} A \quad (\text{non prouvé}) \end{array}$$