# L1MD – session 2 du 17 juin 2016

*Durée 2H. Tout document et matériel électronique interdit*

**1.** Les énoncés suivants sont ils syntaxiquement corrects ? Si ce n'est pas le cas, expliquer pourquoi.

**a.** $\big(y \in E \text{ ou } y \in F\big) \Rightarrow E \cap F$

**b.** $y \in E \text{ ou } \big(y \in F \Rightarrow E \cap F = \emptyset\big)$

**c.** $\forall t : \mathbb{R},\ t \in [0, \pi] \Rightarrow \int_0^\pi \sin(t)dt > 0$

**2.** Formaliser les énoncés suivants (dans les quatre premiers énoncés $A$ est une variable libre de type partie de $\mathbb{R}$ et dans les deux premiers $x$ est une variable libre de type $\mathbb{R}$).

a. $x$ est un minorant de $A$.

b. $x$ est le plus petit élément de $A$.

c. $A$ est minorée

d. $A$ admet un plus petit élément.

e. Toute partie non vide de $\mathbb{N}$ admet un plus petit élément.

**3.** Soient $n \geq p > 0$ deux entiers et $a_1, \ldots, a_p$ $p$-élements distincts de l'ensemble $\{1, \ldots, n\}$. On note $(a_1\ a_2\ \ldots\ a_p)$ la bijection de $\{1, \ldots, n\}$ dans lui même définie par $a_1 \mapsto a_2$, $a_2 \mapsto a_3, \ldots$, $a_p \mapsto a_1$ et $k \mapsto k$ si $k \notin \{a_1, \ldots, a_p\}$. On dit qu'une telle bijection est un cycle de longueur $p$.

**a.** On fixe $n = p = 4$. Quelle est l'image de 3 par le cycle (3 4 1 2) ?

Quelle est l'image de 3 par le cycle (4 1 2 3) ?

Conbien y a t-il de cycles de longueur 4 parmi les bijections de $\{1, 2, 3, 4\}$ ?

**b.** On fixe $n = 7$. On considère la bijection $\sigma$ obtenue en composant deux cycles de $\{1, \ldots, 7\}$ :

$$\sigma = (2\ 5\ 1\ 4) \circ (7\ 2\ 4\ 3)$$

Quelle est l'image de 4 par $\sigma$ ? Quelle est l'orbite de 4 sous l'action de $\sigma$ ? La bijection $\sigma$ est elle un cycle ?

**4.1.** $P, Q$ désignent deux énoncés. Pour que l'énoncé $P \Rightarrow Q$ soit vrai,

**a.** faut il que $P$ soit vrai ?

**b.** suffit il que $P$ soit vrai ?

**c.** faut il que $Q$ soit vrai ?

**d.** suffit il que $Q$ soit vrai ?

**e.** faut il que $P$ soit faux ?

**f.** suffit il que $P$ soit faux ?

**4.3** On note $(E)$ l'énoncé

$$(B \,\text{ou}\, D) \Rightarrow \Big(\big((A \Rightarrow C) \Rightarrow (D \Rightarrow A)\big) \,\text{ou}\, (D \Rightarrow C) \,\text{ou}\, (D \Rightarrow B)\Big)$$

où $C, A, D, B$ sont des variables de type énoncé.

**g.** Combien de lignes a la table de vérité de $(E)$ comme fonction des valeurs de vérité de $C, A, D, B$ ?

**h.** On suppose dans cette question que $D$ est vrai. Soit $P$ un énoncé, à quelle formule simple en $P$ équivaut $D \Rightarrow P$ au sens des tables de vérité ? A quelle formule simple en $C, A, B$ se réduit $(E)$ ?

**i.** On suppose maintenant que $D$ est faux. A quoi se réduit $D \Rightarrow P$ comme fonction de $P$ ? Aue peut on dire de la valeur de vérité de $(E)$ ?

**j.** Pour quelles valeurs de vérité de $C, A, D, B$ a t-on $(E)$ faux ?

**k.** Un enseignant fait lui-même le calcul algébrique dans $(\mathbb{F}_2, +, \times)$ de $(E)$ et trouve l'expression

$$\overline{D} + (1+\overline{C})(1+\overline{A})(1+\overline{B})$$

Ce calcul est il compatible avec votre réponse à la question (j) ?

**5.** Voici une preuve formelle (sans mention des règles appliquées) d'un énoncé dépendant des variables $P, Q$ elles mêmes de type énoncé, sous une hypothèse.

1 $Q$ ou $\neg P$
2 | $Q$
3 | | $P$
4 | | $Q$
5 | $P \Rightarrow Q$
6 $Q \Rightarrow (P \Rightarrow Q)$
7 | $\neg P$
8 | | $P$
9 | | $\perp$
10 | | $Q$
11 | $P \Rightarrow Q$
12 $\neg P \Rightarrow (P \Rightarrow Q)$
13 $P \Rightarrow Q$

Quelle est l'hypothèse de la preuve ? Quelle est la conclusion ?

Quelles sont les règles utilisées permettant d'écrire chacune des lignes parmi les règles explicitées plus loin ? (indiquer le nom de la règle et les lignes intervenant dans l'application de la règle)

On peut poursuivre cette preuve en appliquant une dernière règle de sorte qu'on obtienne un énoncé et une preuve de cet énoncé sans aucune hypothèse. De quelle règle et de quel énoncé s'agit il ?

Liste simplifiée des règles (la dernière ligne se déduit de celles qui précèdent par la règle ainsi nommée). Dans ce qui suit, les lettres $A, B, \ldots$ désignent des énoncés.

| | $A$ (hyp. )
| | $\ldots$
| | B
| $A \Rightarrow B$ $(\vdash\Rightarrow)$

| $A \Rightarrow B$
| $A$
| $B$ (mp)

| $A$
| $A$ (répét)

| $A$ et $B$
| $A$ (affaibl.)

| $A$ et $B$
| $B$ (affaibl.)

| $A$
| $B$
| $A$ et $B$ ($\vdash$ *et*)

| $A$
| $A$ ou $B$ (affaibl.)

| $B$
| $A$ ou $B$ (affaibl.)

| $A$ ou $B$
| $A \Rightarrow C$
| $B \Rightarrow C$
| $C$ (ou $\vdash$)

| $A$
| $\neg A$
| $\perp$ (contradict.)

| | $A$ (hyp. )
| | $\ldots$
| | $\perp$
| $\neg A$ $(\vdash \neg)$

| $\perp$
| $A$ $(\perp\vdash)$

Règles sans prémisses (axiome dont on donne le nom, hypothèse, théorème dont on donne le nom à défaut d'une preuve, résultat non prouvé)

| $\neg\neg A \Rightarrow A$ (ax.$\neg\neg$)

| $A$ (ax. <nom>)

| $A$ (thm <nom>)

| $A$ (hyp. )

| $A$ (non prouvé)