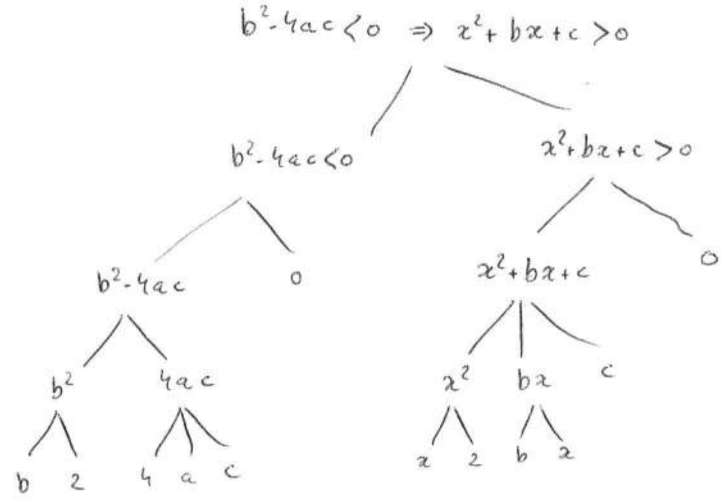
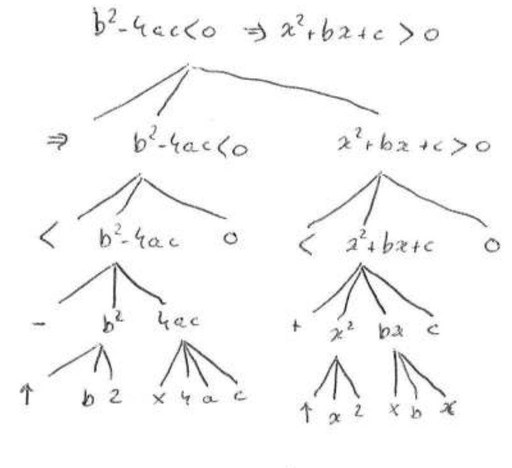
L1 md  corrigé du partiel du 31 mars 17

1. arbre sans mention des opérateurs




Avec opérateurs




2. $\left(\exists y:\mathbb{R},\ \int_0^y f(x)\,dx>0\right) \Rightarrow \left(\exists x:\mathbb{R},\ f(x)>0\right)$

portée de y  x

Variables liées : y et x à gauche de ⇒ , x à droite de ⇒ , portées dessinées ci-dessus

Variables libres : f de type fonction [continue] de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ parce qu'on intègre f sur un intervalle et qu'on compare le résultat avec 0

constantes (hors opérateurs) : $\mathbb{R}$, 0

3.a. Tout nbre réel est minoré par un entier  $\forall x:\mathbb{R}, \exists n:\mathbb{Z}, n\leq x$  (ou $\forall x\in\mathbb{R}, \exists n\in\mathbb{Z}, n\leq x$)

3b. La fonction ln n'est pas majorée sur $]0,+\infty[$  $\neg(\exists M\in\mathbb{R}, \forall x\in ]0,+\infty[, \ln(x)\leq M)$

$\equiv \forall M\in\mathbb{R}, \exists x\in ]0,+\infty[, \ln(x)>M$

4. $x\in A$ et $(\forall y\in A, x\leq y)$  Variables libres $x$, $A$

Traduction : $x$ est le plus petit élément de $A$

5.
1 A ou ¬B (hyp)
2 A (hyp)
3 B (hyp)
4 A (rép) 2
5 B ⇒ A (⊢⇒) 3,4
6 A ⇒ (B ⇒ A) (⊢⇒) 2,5
7 ¬B (hyp)
8 B (hyp)
9 ⊥ (contra) 7,8
10 A (⊥⊢) 9
11 B ⇒ A (⊢⇒) 8,10
12 ¬B ⇒ (B ⇒ A) (⊢⇒) 7,11
13 B ⇒ A (ou⊢) 1,6,12
14 (A ou ¬B) ⇒ (B ⇒ A) (⊢⇒) 1,13

Il n'y a pas d'hypothèse pour cette preuve

La conclusion est (A ou ¬B) ⇒ (B ⇒ A). La preuve implique que cette conclusion est une tautologie, i.e. sa valeur de vérité est Vrai quelles que soient les valeurs de A et B

6. $(E) : \big((P \Rightarrow Q) \text{ et } \neg Q\big) \Rightarrow P$

6a $\neg E \equiv \big((P \Rightarrow Q) \text{ et } \neg Q\big) \text{ et } \neg P \equiv (P \Rightarrow Q) \text{ et } \neg Q \text{ et } \neg P$

6b Pour que $\neg E \equiv V$ il faut $\neg Q \equiv V$ et $\neg P \equiv V$ c'est-à-dire $Q \equiv F$ et $P \equiv F$ Mais alors $P \Rightarrow Q \equiv F \Rightarrow F \equiv V$

donc $\neg E \equiv V$ ssi $P \equiv F$ et $Q \equiv F$

donc $E \equiv F$ ssi $P \equiv F$ et $Q \equiv F$

| P | Q | E |
|---|---|---|
| V | V | V |
| F | V | V |
| V | F | V |
| F | F | F |

6cd $\neg(A \Rightarrow B) \equiv A \text{ et } \neg B$ donc $\overline{\neg(A \Rightarrow B)} = \bar{A} \times \overline{\neg B} = \bar{A}\,(1+\bar{B})$ puis $\overline{A \Rightarrow B} = \overline{\neg\neg(A \Rightarrow B)} = 1 + \overline{\neg(A \Rightarrow B)} = 1 + \bar{A}\,(1+\bar{B})$

$$\bar{E} = 1 + \overline{(P \Rightarrow Q) \text{ et } \neg Q} \times (1+\bar{P}) = 1 + \overline{P \Rightarrow Q} \times \overline{\neg Q} \times (1+\bar{P})$$
$$= 1 + \big(1+\bar{P}(1+\bar{Q})\big)\,(1+\bar{Q})\,(1+\bar{P})$$

On peut simplifier astucieusement : $\bar{P}(1+\bar{P}) = \bar{P} + \bar{P}^2 = \bar{P} + \bar{P} = 0$ (dans $\mathbb{F}_2$ !)

donc $\bar{P}(1+\bar{Q})(1+\bar{Q})(1+\bar{P}) = 0$

puis $1 + \big(1+\bar{P}(1+\bar{Q})\big)(1+\bar{Q})(1+\bar{P}) = 1 + (1+\bar{Q})(1+\bar{P})$

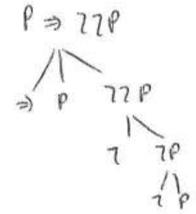
On n'a pas intérêt à développer

On observe $\bar{E} = 0 \Leftrightarrow (1+\bar{Q})(1+\bar{P}) = 1 \Leftrightarrow 1+\bar{Q} = 1$ et $1+\bar{P} = 1 \Leftrightarrow \bar{Q} = 0$ et $\bar{P} = 0 \Leftrightarrow Q \equiv F$ et $P \equiv F$

On retrouve ainsi $E \equiv F$ ssi $P \equiv F$ et $Q \equiv F$

6e Si on pouvait prouver E alors E serait une tautologie ce qui n'est pas.

7. On utilise l'arbre



pour écrire les esquisses successives

1 | $P$ (hyp)
2 | $\neg\neg P$
$P \Rightarrow \neg\neg P$ $(\vdash\Rightarrow)$ 1,2

1 | $P$ (hyp)
2 | | $\neg P$ (hyp)
3 | | $\bot$
4 | $\neg\neg P$ $(\vdash\neg)$ 2,3
5 $P \Rightarrow \neg\neg P$ $(\vdash\Rightarrow)$ 1,4

La ligne 3 de la deuxième esquisse se déduit des lignes 1,2 par la règle (contr.), la deuxième esquisse est donc une preuve complète

Rq Pas toutes les preuves s'obtiennent de cette façon : une preuve peut faire intervenir l'axiome (ax. $\neg\neg$) ou de façon équivalente l'axiome du tiers exclus