L1MD – examen du 16 mai 2017

Durée 2H. Tout document et matériel électronique interdit.

1. On rappelle qu'une formule f (désignant un objet) est définit par la propriété caractéristique $P_f(x)$ (dépendant d'une variable libre x et ne faisant pas apparaître la formule f) si on a la règle (qui s'ajoute aux règles en cours)

$\exists x,\ P_f(x)$
$Q(f) \Leftrightarrow \big(\forall x,\ P_f(x) \Rightarrow Q(x)\big)$ (déf. f)

pour tout énoncé $Q(x)$ dépendant d'une variable libre x et ne faisant pas apparaître la formule f.

Montrer formellement que l'objet f ainsi défini vérifie la propriété P_f (c'est à dire donner une preuve formelle de $P_f(f)$ à partir de la règle (déf. f) et des règles rappelées au dos du sujet).

Soient E un ensemble et $P(x)$ un énoncé dont x est une variable libre (une "propriété" de x). Quelle est la propriété caractéristique de l'objet $\{x \in E, P(x)\}$?

Quel énoncé ne faisant pas intervenir la formule $\{x \in E, P(x)\}$ doit on prouver pour prouver formellement $\{x \in E,\ x \notin x\} \notin E$?

2. Donner, en détaillant les calculs, la liste des éléments de l'ensemble

$$\cup\{\mathcal{P}(\emptyset), \mathcal{P}(\{1,2\}), \mathcal{P}(\{2,3\})\}$$

où, pour x un ensemble, $\mathcal{P}(x)$ désigne l'ensemble $\{y,\ (\forall z, z \in y \Rightarrow z \in x)\}$ et où $\cup x$ désigne l'ensemble $\{y,\ (\exists z, y \in z \,\text{et}\, z \in x)\}$.

Obtient on $\mathcal{P}(\{1,2,3\})$?

3. On définit la relation R sur l'ensemble $\{1,2,3,4\}$ par $xRy \Leftrightarrow (x,y) \in \Gamma$, où $\Gamma = \{(1,1),(3,2),(4,3)\}$.

Montrer que la relation R est fonctionnelle.

R est elle une application de $\{1,2,3,4\}$ dans lui même ?

Est elle injective comme fonction $\{1,2,3,4\} \to \{1,2,3,4\}$?

Est elle surjective comme fonction $\{1,2,3,4\} \to \{1,2,3,4\}$?

4. Soient $n \geq p > 0$ deux entiers et $a_1, \ldots, a_p$ p-élements distincts de l'ensemble $\{1,\ldots,n\}$. On note $(a_1\ a_2\ \ldots\ a_p)$ la bijection de $\{1,\ldots,n\}$ dans lui même définie par $a_1 \mapsto a_2$, $a_2 \mapsto a_3, \ldots,$ $a_p \mapsto a_1$ et $k \mapsto k$ si $k \notin \{a_1,\ldots,a_p\}$. On dit qu'une telle bijection est un cycle de longueur p.

a. On fixe $n = p = 4$. Quelle est l'image de 3 par le cycle $(3\ 4\ 1\ 2)$?

Quelle est l'image de 3 par le cycle $(4\ 1\ 2\ 3)$?

Conbien y a t-il de cycles de longueur 4 parmi les bijections de $\{1,2,3,4\}$?

b. On fixe $n = 7$. On considère la bijection σ obtenue en composant deux cycles de $\{1,\ldots,7\}$:

$$\sigma = (2\ 5\ 1\ 4) \circ (7\ 2\ 4\ 3)$$

Quelle est l'image de 4 par σ ? Quelle est l'orbite de 4 sous l'action de σ ? La bijection σ est elle un cycle ?

c. On note τ la composée $(2\ 5\ 1\ 3)(4\ 7\ 6)$. Quel est le plus petit entier $n > 0$ tel que τ^n soit l'application identité ?

5. On note (E) l'énoncé

$$R \Rightarrow \Big(\big((Q \Rightarrow P) \Rightarrow (R \Rightarrow Q)\big) \,\text{ou}\, (R \Rightarrow P) \,\text{ou}\, \neg R\Big)$$

où P, Q, R sont des variables de type énoncé.

a. On suppose dans cette question que R est vrai. A quelle formule simple en P se réduit alors $R \Rightarrow P$?

A quelle formule simple en P, Q se réduit alors (E) ? (On pourra calculer la table de vérité de (E) dans le cas $R \equiv V$ et reconnaître une formule simple en P, Q)

b. On suppose maintenant que R est faux. A quelle formule simple se réduit alors (E) ?

c. En déduire une formule équivalente à (E) écrite avec les seuls opérateurs $\neg$, ou

d. Calculer l'expression algébrique dans $(\mathbb{F}_2, +, x)$ de (E) comme fonction de $\overline{P}, \overline{Q}, \overline{R}$.

6. Ecrire avec les règles données plus loin et sans l'axiome (ax.$\neg\neg$) une preuve de la règle

$\perp$
$\neg A \quad (\perp\vdash)$

En déduire avec l'axiome (ax.$\neg\neg$) une preuve de la règle

$\perp$
$A \quad (\perp\vdash)$

7. Voici une preuve en théorie des ensembles dont on a omis les règles ($x \notin y$ est une abréviation de $\neg(x \in y)$).

1 a
2 $\forall x,\ x \in a \Leftrightarrow (x \in E \text{ et } x \notin x)$
3 $a \in a \Leftrightarrow (a \in E \text{ et } a \notin a)$
4 | $a \in a$
5 | $a \in E \text{ et } a \notin a$
6 | $a \notin a$
7 | $\perp$
8 $a \notin a$
9 | $a \in E$
10 | $a \in E \text{ et } a \notin a$
11 | $a \in a$
12 | $\perp$
13 $a \notin E$

Compléter la preuve par les noms des règles utilisées suivis des numéros des lignes concernées.

Que prouve t-on ? Sous quelle(s) hypothèse(s) ? Comment est-ce lié à l'exercice 1. ?

Liste des règles.

A
A (rép.)

| A (hyp.)
| B
$A \Rightarrow B \quad (\vdash\Rightarrow)$

$A \Rightarrow B$
A
B (mp)

$A \text{ et } B$
A (aff.)

$A \text{ et } B$
B (aff.)

A
B
$A \text{ et } B \quad (\vdash et)$

A
$A \text{ ou } B$ (aff.)

B
$A \text{ ou } B$ (aff.)

$A \text{ ou } B$
$A \Rightarrow C$
$B \Rightarrow C$
$C \quad (\text{ou} \vdash)$

A
$\neg A$
$\perp$ (contr.)

| A (hyp.)
| $\perp$
$\neg A \quad (\vdash \neg)$

$(A \Rightarrow B) \text{ et } (B \Rightarrow A)$
$A \Leftrightarrow B \quad (\vdash\Leftrightarrow)$

$A \Leftrightarrow B$
A
$B \quad (\Leftrightarrow\vdash)$

$A \Leftrightarrow B$
B
$A \quad (\Leftrightarrow\vdash)$

$\neg\neg A \Rightarrow A$ (ax.$\neg\neg$)

| x (declar)
| $P(x)$
$\forall x,\ P(x) \quad (\vdash \forall)$

$\forall x,\ P(x)$
$P(t) \quad (\forall \vdash)[x := t]$

$P(t)$
$\exists x,\ P(x) \quad (\vdash \exists)[x := t]$

$\exists x,\ P(x)$
| z (declar)
| $P(z)$ (hyp.)
| A
$A \quad (\exists \vdash)$