Preuves du calcul propositionnel

Liste des règles du calcul propositionnel. L'interprétation est que la dernière ligne se déduit des lignes qui précèdent par application de la règle dont on donne le nom (nom) suivi des numéros des lignes concernées par la règle.

$$\begin{array}{l} A \\ A \quad (\text{rép.}) \end{array} \qquad \begin{array}{l} \left| \begin{array}{l} A \quad (\text{hyp. }) \\ B \end{array} \right. \\ A \Rightarrow B \quad (\vdash\Rightarrow) \end{array} \qquad \begin{array}{l} A \Rightarrow B \\ A \\ B \quad (\text{mp}) \end{array} \qquad \begin{array}{l} A \text{ et } B \\ A \quad (\text{aff.}) \end{array} \qquad \begin{array}{l} A \text{ et } B \\ B \quad (\text{aff.}) \end{array} \qquad \begin{array}{l} A \\ B \\ A \text{ et } B \quad (\vdash \textit{et}) \end{array}$$

$$\begin{array}{l} A \\ A \text{ ou } B \quad (\text{aff.}) \end{array} \qquad \begin{array}{l} B \\ A \text{ ou } B \quad (\text{aff.}) \end{array} \qquad \begin{array}{l} A \text{ ou } B \\ A \Rightarrow C \\ B \Rightarrow C \\ C \quad (\text{ ou } \vdash) \end{array} \qquad \begin{array}{l} A \\ \neg A \\ \bot \quad (\text{contr.}) \end{array} \qquad \begin{array}{l} \left| \begin{array}{l} A \quad (\text{hyp. }) \\ \bot \end{array} \right. \\ \neg A \quad (\vdash \neg) \end{array} \qquad \begin{array}{l} \bot \\ A \quad (\bot\vdash) \end{array}$$

$$\begin{array}{l} (A \Rightarrow B) \text{ et } (B \Rightarrow A) \\ A \Leftrightarrow B \quad (\vdash\Leftrightarrow) \end{array} \qquad \begin{array}{l} A \Leftrightarrow B \\ (A \Rightarrow B) \text{ et } (B \Rightarrow A) \quad (\Leftrightarrow\vdash) \end{array}$$

Règles sans prémisses (axiome dont on donne le nom, énoncé déjà prouvé dont on donne la référence)

A (ax. <nom>) $\qquad$ A (thm <nom>)

Le seul axiome qu'on donne pour l'instant est celui de la double négation :
$\neg\neg A \Rightarrow A$ (ax.$\neg\neg$)

Un texte décalé à droite est une preuve de sa dernière ligne sous l'hypothèse provisoire de la première ligne. Il justifie la première ligne qui le suit et seulement celle-ci (règles $(\vdash\Rightarrow)$ et $(\vdash \neg)$).
Un texte avec en commentaire de chaque ligne sa justification sous forme du nom de la règle appliquée et des numéros de lignes concernées par l'application de la règle ou bien la mention (hyp.) pour la première ligne d'un sous-texte décalé à droite, est une preuve des lignes commentées et non décalées à droite sous l'hypothèse des lignes non commentées.
Un texte contenant des lignes non commentées en excès s'interprète comme une esquisse de preuve. Si le texte est écrit en langage naturel, ce sera un scénario de preuve.

1. *(Partiel mars 2016)* Voici une preuve formelle sans mention des règles appliquées (les lettres P, Q représentent des énoncés). Que prouve t-on ? Sous quelles hypothèses ? Qu'en déduit on en terme de tables de vérité des formules en jeu ?

Quelles sont les règles utilisées permettant d'écrire chacune des lignes parmi les règles de l'encadré ?

$$\begin{array}{ll} & \begin{array}{rl} _1 & \left| \begin{array}{l} (P \Rightarrow Q) \text{ et } \neg Q \\ P \Rightarrow Q \\ \neg Q \\ \begin{array}{rl} _4 & \left| \begin{array}{l} P \\ Q \\ \bot \end{array} \right. \end{array} \\ \neg P \end{array} \right. \end{array} \\ _8 & \big((P \Rightarrow Q) \text{ et } \neg Q\big) \Rightarrow \neg P \end{array}$$

1 $(P \Rightarrow Q) \text{ et } \neg Q$
2 $P \Rightarrow Q$
3 $\neg Q$
4 $\quad P$
5 $\quad Q$
6 $\quad \bot$
7 $\neg P$
8 $\big((P \Rightarrow Q) \text{ et } \neg Q\big) \Rightarrow \neg P$

2. *(Session 2, juin 2016)* Voici ci-dessous une preuve formelle d'un énoncé dépendant des variables P, Q elles mêmes de type énoncé, sous une hypothèse. On a numéroté les lignes ; on n'a pas mentionné les règles appliquées.

Quelle est l'hypothèse de la preuve ? Quelle est la conclusion ?

Quelles sont les règles utilisées permettant d'écrire chacune des lignes parmi les règles de l'encadré ? (indiquer le nom de la règle et les numéros des lignes concernées)

On peut poursuivre cette preuve en appliquant une dernière règle de sorte qu'on obtienne un énoncé et une preuve de cet énoncé sans aucune hypothèse. De quelle règle et de quel énoncé s'agit il ?

9 $Q \text{ ou } \neg P$

10 $\quad \mid Q$

11 $\quad \mid \quad \mid P$

12 $\quad \mid \quad \mid Q$

13 $\quad \mid P \Rightarrow Q$

14 $Q \Rightarrow (P \Rightarrow Q)$

15 $\quad \mid \neg P$

16 $\quad \mid \quad \mid P$

17 $\quad \mid \quad \mid \perp$

18 $\quad \mid \quad \mid Q$

19 $\quad \mid P \Rightarrow Q$

20 $\neg P \Rightarrow (P \Rightarrow Q)$

21 $P \Rightarrow Q$

3. Ecrire une preuve formelle des énoncés suivants sans l'axiome (ax.$\neg\neg$). (sans parenthésage $\neg$ s'applique prioritairement aux autres opérations)

$P \Rightarrow \neg\neg P, \quad \neg\neg(P \text{ ou } \neg P), \quad \neg P \text{ ou } \neg\neg P$

4. Prouver l'axiome du tiers exclus : $P \text{ ou } \neg P$ (utiliser l'ex. précédent).

Preuves de la logique du premier ordre

En plus des constructions (formules) et des règles de raisonnement du calcul propositionnel on introduit le symbole $=$, les constructions $\forall x,\ P(x)$ et $\exists x,\ P(x)$, où $P(x)$ désigne une formule de type énoncé dont x est une variable libre (éventuellement absente), et les règles associées. La variable introduite par (déclar.) peut avoir n'importe quel nom pourvu que ce nom n'entre pas en conflit avec les noms des autres variables du texte. Dans deux des règles t désigne une formule en les constantes et variables libres ayant cours.
Comme pour un texte décalé à droite commençant par (hyp.), un texte décalé à droite commençant par (déclar.) a une portée qui s'arrête à la première ligne qui le suit.

$x = x \quad$ (ax. $=$)

$x = y$
$P(x) \Leftrightarrow P(y) \quad (=\vdash)$

$\quad \mid x \quad$ (declar)
$\quad \mid P(x)$
$\forall x,\ P(x) \quad (\vdash \forall)$

$\forall x,\ P(x)$
$P(t) \quad (\forall \vdash)[x := t]$

$P(t)$
$\exists x,\ P(x) \quad (\vdash \exists)[x := t]$

$\exists x,\ P(x)$
$\quad \mid z \quad$ (declar)
$\quad \mid P(z) \quad$ (hyp.)
$\quad \mid A$
$A \quad (\exists \vdash)$

5. Prouver la transitivité de l'égalité : $(x = y \text{ et } y = z) \Rightarrow x = z$

6. Prouver les deux énoncés $(\exists x, P(x)) \Rightarrow \neg(\forall x, \neg P(x))$, $(\forall x, \neg P(x)) \Rightarrow \neg(\exists x, P(x))$. En déduire avec l'axiome (ax.$\neg\neg$) une preuve de $\neg(\forall x, P(x)) \Leftrightarrow (\exists x, \neg P(x))$ et de $\neg(\exists x, P(x)) \Leftrightarrow (\forall x, \neg P(x))$.

Macro-règles

Une macro-règle est une règle dont l'application se déduit de l'application des règles admises. Une preuve de cette affirmation permet d'ajouter la macro-règle à la liste des règles admises. On définit une macro-règle lorsque le raisonnement qu'elle explicite est employé de façon répétée dans les preuves.

7. Prouver les macro-règles :

$\neg\neg A$
$A \quad (\neg\neg \vdash)$

$A \Leftrightarrow B$
A
$B \quad (\Leftrightarrow\vdash)$

$x = y$
$P(x)$
$P(y) \quad (=\vdash)$

$\quad \mid A$
$\quad \mid$ B
$\quad \mid \neg A$
$\quad \mid B$
$B \quad$ (dist.H)