L1MD – partiel du 31 mars 2017

Durée 1H15. Tout document et matériel électronique interdit.

1. Ecrire l'arbre de la formule

$$b^2 - 4c < 0 \;\Rightarrow\; x^2 + bx + c > 0$$

2. On considère la formule

$$\left(\exists y : \mathbb{R},\ \int_0^y f(x)dx > 0\right) \;\Rightarrow\; \left(\exists x : \mathbb{R},\ f(x) > 0\right)$$

Quelles sont les constantes de la formule ? (On ne retient pas les opérateurs).

Quelles sont les variables libres ? Proposer un type raisonnable pour chacune de ces variables.

Quelles sont les variables liées ? Quelle est leur portée ? (Dessiner leur portée sur la formule.)

3. Formaliser :

(a) Tout nombre réel est minoré par un entier.

(b) La fonction ln n'est pas majorée sur $[0, +\infty[$.

4. Quelles sont les variables libres de la formule ci-dessous ? Traduisez là en langage naturel sans variable liée.

$$x \in A \,\text{et}\, (\forall y \in A, x \leq y)$$

5. On reproduit ci-dessous une preuve formelle d'un énoncé dépendant des variables A, B elles mêmes de type énoncé. On a numéroté les lignes ; on n'a pas mentionné les règles appliquées.

Quelle est l'hypothèse de la preuve ? Quelle est la conclusion ? Que peut on dire de la table de vérité de la conclusion en fonction des valeurs de vérité de A et B ?

Quelles sont les règles utilisées permettant d'écrire chacune des lignes parmi les règles de l'encadré plus bas ? (indiquer le nom de la règle et les numéros des lignes concernées)

$$
\begin{array}{rl}
1 & \mid A \text{ ou } \neg B \\
2 & \mid\ \mid A \\
3 & \mid\ \mid\ \mid B \\
4 & \mid\ \mid\ \mid A \\
5 & \mid\ \mid B \Rightarrow A \\
6 & \mid A \Rightarrow (B \Rightarrow A) \\
7 & \mid\ \mid \neg B \\
8 & \mid\ \mid\ \mid B \\
9 & \mid\ \mid\ \mid \bot \\
10 & \mid\ \mid\ \mid A \\
11 & \mid\ \mid B \Rightarrow A \\
12 & \mid \neg B \Rightarrow (B \Rightarrow A) \\
13 & \mid B \Rightarrow A \\
14 & (A \text{ ou } \neg B) \;\Rightarrow\; (B \Rightarrow A)
\end{array}
$$

Suite au verso

6. On considère l'énoncé

$$(E): \quad \big((P \Rightarrow Q) \text{ et } \neg Q\big) \Rightarrow P$$

a. Donner la négation de (E) (sous une forme simplifiée).

b. Donner la table de vérité de (E).

c. On note $\overline{A}$ l'expression algébrique dans $(\mathbb{F}_2, +, \times)$ d'un énoncé A. On rappelle qu'on a $\overline{\neg A} = 1 + \overline{A}$ et $\overline{A \text{ et } B} = \overline{A} \times \overline{B}$.

d. Exprimer $\neg(A \Rightarrow B)$ avec les seuls opérateurs '$\neg$' et ' et '. En déduire l'expression algébrique de $A \Rightarrow B$ en fonction de $\overline{A}$ et $\overline{B}$.

Calculer l'expression algébrique de (E) en fonction de $\overline{P}$ et $\overline{Q}$ (sans utiliser le résultat de la question b). Le résultat que vous obtenez est il compatible avec celui de la question b ?

e. Peut on donner une preuve de (E) avec les règles de l'encadré plus bas ?

7. Ecrire une preuve avec les règles de l'encadré de

$$P \Rightarrow \neg\neg P$$

Liste des règles du calcul propositionnel. L'interprétation est que la dernière ligne se déduit des lignes qui précèdent par application de la règle dont on donne le nom (nom) suivi des numéros des lignes concernées par la règle.

A A (rép.)	$\mid A$ (hyp.) $\mid B$ $A \Rightarrow B$ $(\vdash\Rightarrow)$	$A \Rightarrow B$ A B (mp)	$A \text{ et } B$ A (aff.)	$A \text{ et } B$ B (aff.)	A B $A \text{ et } B$ $(\vdash \mathit{et})$
A $A \text{ ou } B$ (aff.)	B $A \text{ ou } B$ (aff.)	$A \text{ ou } B$ $A \Rightarrow C$ $B \Rightarrow C$ C (ou $\vdash$)	A $\neg A$ $\bot$ (contr.)	$\mid A$ (hyp.) $\mid \bot$ $\neg A$ $(\vdash \neg)$	$\bot$ A $(\bot\vdash)$
$(A \Rightarrow B) \text{ et } (B \Rightarrow A)$ $A \Leftrightarrow B$ $(\vdash\Leftrightarrow)$	$A \Leftrightarrow B$ $(A \Rightarrow B) \text{ et } (B \Rightarrow A)$ $(\Leftrightarrow\vdash)$				

$\neg\neg A \Rightarrow A$ (ax.$\neg\neg$)