L2 Mass Proba — un corrigé de l'examen du 15 décembre 2016

Q1 Le résultat de l'expérience correspond à une et une seule issue dans le modèle Ω proposé.
Un événement est une propriété du résultat, il correspond à aucune, une seule ou plusieurs issues (pourvu qu'il soit représentable dans Ω)
Dans le modèle (Ω, P) une issue correspond à un élément de Ω ; un événement correspond à une partie de Ω

Q2 On retient les issues P et F d'où $\Omega = \{P, F\}$ avec équiprobabilité puisque la pièce est dite équilibrée
Les événements sont alors $\emptyset$, $\{P\}$, $\{F\}$, $\{P,F\} = \Omega$. Ils ne sont pas équiprobables : $P(\emptyset) = 0 \neq P(\Omega) = 1$

Ex3 Notons Ma l'événement "être malade"
Med — "prendre le médicament"
On cherche p_{Ma}. On connaît $p_{Med} = 10\%$, $p_{Ma|Med} = 80\%$, $p_{\overline{Med}, Ma} = 20\%$

On a $p_{Ma} = \underbrace{p_{Ma \text{ et } Med}}_{= p_{Ma|Med} \times p_{Med}} + \underbrace{p_{Ma \text{ et } \overline{Med}}}_{= p_{\overline{Med}|Ma} \times p_{Ma}} = 0{,}8 \times 0{,}1 + 0{,}2 \times p_{Ma}$ d'où $p_{Ma} = \dfrac{0{,}8 \times 0{,}1}{1 - 0{,}2} = 0{,}1$

Ex4 $X \sim \mathcal{U}(\{-1, 0, 1\})$, $Y = X^2$ prend pour valeurs 0 et 1
$Cov(X,Y) = E(XY) - E(X)E(Y) = E(X^3) - E(X)E(X^2)$
On observe $x^3 = x$ si $x \in \{-1, 0, 1\}$ donc $X^3 = X$ donc $E(X^3) = E(X)$
$E(X) = -1 \times P(X=-1) + 0 \times P(X=0) + 1 \times P(X=1) = -1 \times 1/3 + 0 \times 1/3 + 1 \times 1/3 = 0$ d'où $Cov(X,Y) = 0$
On sait que si X et Y sont indépendantes alors $Cov(X,Y) = 0$ mais la réciproque est fausse : on ne peut pas déduire l'indépendance de X,Y de $Cov(X,Y) = 0$. Ici $P(Y=0 | X=0) = 1 \neq P(Y=0) = \frac{1}{3}$ donc X et Y ne sont pas indépendantes.

Ex5 1/3 sur l'arête $\bar{S} - S$ entre l'étape 2 et l'étape 3 correspond à la probabilité conditionnelle $P(S$ à l'étape 3 $| \bar{S}$ à l'étape 1 et $\bar{S}$ à l'étape 2$)$

On peut compléter l'arbre avec $1 - 1/7 = 6/7$ sur l'arête $\bar{S} - \bar{S}$ entre les étapes 1 et 2
$1 - 1/5 = 4/5$ — $\bar{S} - \bar{S}$ — 3 et 4 en haut
$1 - 1/3 = 2/3$ — $\bar{S} - \bar{S}$ — 2 et 3
$1 - 1/5 = 4/5$ — $\bar{S} - \bar{S}$ — 3 et 4 au milieu, ~~nid~~
$1 - 3/5 = 2/5$ — $\bar{S} - \bar{S}$ — 3 et 4 en bas

Les issues correspondent exactement aux chemins dans l'arbre qu'on peut désigner par la suite des noeuds, soit :
$(\bar{S}, S, \bar{S}, S)$, $(\bar{S}, S, \bar{S}, \bar{S})$, $(\bar{S}, \bar{S}, S, S)$, $(\bar{S}, \bar{S}, S, \bar{S})$, $(\bar{S}, \bar{S}, \bar{S}, S)$, $(\bar{S}, \bar{S}, \bar{S}, \bar{S})$

de proba respectives $1 \times 1/7 \times 1 \times 1/5 = 1/35$, $1 \times 1/7 \times 1 \times 4/5 = \frac{4}{35}$, $1 \times 6/7 \times 1/3 \times 1/5 = 2/35$, $1 \times 6/7 \times 1/3 \times 4/5 = 8/35$,
$1 \times 6/7 \times 2/3 \times 3/5 = 12/35$, $1 \times 6/7 \times 2/3 \times 2/5 = 8/35$

Notons $N(\omega)$ le nombre de S d'une issue ω. Pour les ω listés ci-dessus on a $N(\omega) = 2, 1, 2, 1, 1, 0$ dans l'ordre
$P(N=2) = \frac{1}{35} + 2/35 = 3/35$: l'événement $N=2$ correspond aux issues 1 et 3
$P(N=1) = 4/35 + 8/35 + 12/35 = 24/35$; $P(N=0) = 8/35$
$E(N) = 2 \times 3/35 + 1 \times 24/35 + 0 \times 8/35 = 30/35 = \frac{6}{7}$

Ex 6 Notons D la valeur du dé. P(le petit frère gagne des bonbons lors d'une partie) $= P(D \leq 4) = 4/6$

puisque $D \sim \mathcal{U}(\{1,\dots,6\})$

~~X_i~~ Notons D_i la valeur du dé lors de la i-ème partie. $X_i = -D_i$ si $D_i \leq 4$

$= D_i$ si $D_i > 4$

$E(Y_n) = E\left(\frac{X_1+\dots+X_n}{n}\right) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} E(X_i)$ par linéarité de l'espérance.

$= E(X_1)$ car les X_i ont toutes même loi (répétition d'une même expérience)

$= \frac{1}{6}(-1-2-3-4+5+6) = 1/6$

$Var(Y_n) = \frac{1}{n^2} Var(X_1+\dots+X_n) = \frac{1}{n^2}(Var(X_1)+\dots+Var(X_n))$ car les X_i ~~sont~~ indépendantes (les expériences sont indépendantes)

$= \frac{1}{n^2} n Var(X_1)$ car les X_i ont même loi

$Var(X_1) = E(X_1^2) - E(X_1)^2$

$E(X_1^2) = \frac{1}{6}(1+4+9+16+25+36) = \frac{91}{6}$ $\leadsto Var(X_1) = \frac{91}{6} - 1/36 = \frac{545}{36}$

$= 15 + 1/6 - 1/36 = 15,1..$

$Var(Y_n) = \frac{1}{n} \times \frac{545}{36}$

$p_n = P(Y_n \geq 0) = P(Y_n \geq E(X_1) - 1/6)$

La loi des grands nombres dit que pour tout $\varepsilon > 0$, $P(Y_n \in [E(X_1)-\varepsilon, E(X_1)+\varepsilon])$ tend vers 1 quand $n \to \infty$

$1 \geq \underbrace{P(Y_n \geq E(X_1) - 1/6)}_{p_n} \geq P(Y_n \in [E(X_1) - 1/6, E(X_1)+1/6]) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1$ donc $p_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1$

Ex 7 $Z = \max(X,Y)$

$F_Z(t) = P(Z \leq t) = P(X \leq t \text{ et } Y \leq t) = P(X \leq t)\, P(Y \leq t)$ par indépendance de X et Y

$= P(X \leq t)^2$ puisque X et Y ont même loi

$= 0$ si $t < 0$

$= \left(\int_0^t 3e^{-3x}dx\right)^2$ si $t > 0$

$= \left(\left[-e^{-3x}\right]_0^t\right)^2 = (1-e^{-3t})^2$ si $t > 0$

Z admet la densité $\frac{d}{dt}F_Z(t)$ pourvu que F_Z soit continue sur $\mathbb{R}$ et [continuement] dérivable par morceaux

F_Z est bien continuement dérivable sur $]-\infty,0[$ et sur $]0,+\infty[$. On a $\lim_{\substack{t\to 0\\ t<0}} F_Z(t) = \lim_{\substack{t\to 0\\ t<0}} 0 = 0$

et $\lim_{\substack{t\to 0\\ t>0}} F_Z(t) = \lim_{\substack{t\to 0\\ t>0}} (1-e^{-3t})^2 = 0$ donc F_Z est bien continue en 0

Conclusion : Z admet la densité $\frac{d}{dt}F_Z(t) = 0$ si $t < 0$

$= 2 \times 3e^{-3t} \times (1-e^{-3t}) = 6e^{-3t} - 6e^{-6t}$ si $t > 0$

$E(Z) = \int_{-\infty}^{+\infty} t\, f_Z(t)\,dt = \int_0^{+\infty} t\, 6(e^{-3t} - e^{-6t})\,dt \underset{IPP}{=} \left[6t\left(\frac{-e^{-3t}}{3} + \frac{e^{-6t}}{6}\right)\right]_0^{+\infty} - \int_0^{+\infty} 6\left(-\frac{e^{-3t}}{3} + \frac{e^{-6t}}{6}\right)dt = -\left[2\frac{e^{-3t}}{3} - \frac{e^{-6t}}{6}\right]_0^{+\infty}$

$= 1/2$