L2 Mass Proba   Corrigé de l'interrogation du 1er dec 16 - Sujet A

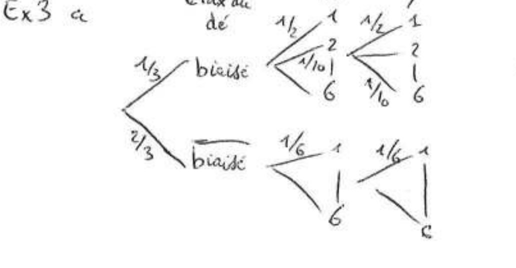
Q1 Voir corrigé int 1

Ex2 Lors d'un lancé $P(5 \text{ ou } 6) = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$

N est le nombre de succès lors de 10 répétitions indépendantes d'une même expérience avec $P(\text{succès}) = \frac{1}{3}$ donc N suit la loi binomiale $B(10, 1/3)$ $\left(P(N=k) = \binom{10}{k} \left(\frac{1}{3}\right)^k \left(\frac{2}{3}\right)^{10-k} \text{ pour } k \in \{0, \dots, 10\} \right)$

$\rightsquigarrow E(N) = 10 \times \frac{1}{3}$, $Var(N) = 10 \times \frac{1}{3} \times \frac{2}{3} = \frac{20}{9}$

Ex3 a



$\Omega = \{\text{chemins dans l'arbre}\}$, $P(\omega)$ = produit des étiquettes du chemin ω

b $E(X \mid \overline{\text{biaisé}}) = \frac{1}{6} \sum_{i=1}^{6} i = \frac{1}{6} \frac{(1+6)6}{2} = \frac{7}{2}$

$E(X \mid \text{biaisé}) = \frac{1}{2} \times 1 + \frac{1}{10} \sum_{i=2}^{6} i = \frac{1}{2} + \frac{(2+6)5}{2} \times \frac{1}{10} = \frac{5}{2}$

c $E(X) = E(X \mid \text{biaisé}) P(\text{biaisé}) + E(X \mid \overline{\text{biaisé}}) P(\overline{\text{biaisé}}) = \frac{5}{2} \times \frac{1}{3} + \frac{7}{2} \times \frac{2}{3} = \frac{19}{6} = 3 + \frac{1}{6}$. Rq : on peut aussi déterminer la loi de X et en déduire $E(X)$

$E(X+Y) = E(X) + E(Y)$ par linéarité

$= 2E(X)$ car X et Y ont même loi (c'est la même expérience qui donne X ou Y)

$= \frac{19}{3}$

d On compare $P(X=1 \text{ et } Y=1) = \frac{1}{3} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} + \frac{2}{3} \times \frac{1}{6} \times \frac{1}{6} = \frac{11}{108}$

avec $P(X=1)P(Y=1) \underset{\text{car X et Y ont même loi}}{=} P(X=1)^2 = \left(\frac{1}{3} \times \frac{1}{2} + \frac{2}{3} \times \frac{1}{6}\right)^2 = \left(\frac{5}{18}\right)^2 = \frac{25}{324}$

Or $11 \times 324 = 3564 > 25 \times 108 = 2700$ donc $P(X=1 \text{ et } Y=1) > P(X=1)P(Y=1)$ donc X et Y ne sont pas indépendantes

e $E(X^2) = E(X^2 \mid \text{biaisé}) P(\text{biaisé}) + E(X^2 \mid \overline{\text{biaisé}}) P(\overline{\text{biaisé}}) = \left(\frac{1}{2} \times 1^2 + \frac{1}{10}(2^2 + 3^2 + 4^2 + 5^2 + 6^2) \right) \frac{1}{3} + \left(\frac{1}{6}(1^2 + \dots + 6^2) \right) \frac{2}{3}$

$= \frac{1}{3} \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{10}(4 + 9 + 16 + 25 + 36) \right) + \frac{2}{18}(1 + 4 + 9 + 16 + 25 + 36)$

$= \frac{1}{3} \times \frac{19}{2} + \frac{91}{9} = \frac{239}{18}$

$Var(X^2) = E(X^2) - E(X)^2 = \frac{239}{18} - \left(\frac{19}{6}\right)^2 = \frac{478}{36} - \frac{361}{36} = \frac{117}{36} = \frac{13}{4} = 3 + \frac{1}{4}$

$Var(X+Y) = \underbrace{Var(X) + Var(Y)}_{\substack{2\,Var(X) \text{ car X et Y ont m̂ loi} \\ = \frac{13}{2}}} + 2\,Cov(X,Y)$. $Cov(X,Y) = E(XY) - E(X)E(Y)$ n'est pas nul a priori car X et Y ne sont pas indépendantes.

$E(XY) = E(XY \mid \text{biaisé}) P(\text{biaisé}) + E(XY \mid \overline{\text{biaisé}}) P(\overline{\text{biaisé}})$

$E(XY \mid \text{biaisé}) = E(X \mid \text{biaisé}) E(Y \mid \text{biaisé})$ car sachant "biaisé" X et Y sont indépendantes

$= E(X \mid \text{biaisé})^2$ car X et Y ont m̂ loi

$= \left(\frac{5}{2}\right)^2 = \frac{25}{4}$

De même $E(XY \mid \overline{\text{biaisé}}) = E(X \mid \overline{\text{biaisé}}) E(Y \mid \overline{\text{biaisé}}) = E(X \mid \overline{\text{biaisé}})^2 = \left(\frac{7}{2}\right)^2 = \frac{49}{4}$ d'où $E(XY) = \frac{25}{4} \times \frac{1}{3} + \frac{49}{4} \times \frac{2}{3} = \frac{123}{12} = \frac{41}{4}$

$Cov(X,Y) = \frac{41}{4} - E(X)^2 = \frac{41}{4} - \frac{361}{36} = \frac{369 - 361}{36} = \frac{2}{9}$ puis $Var(X+Y) = \frac{13}{2} + \frac{4}{9} = \frac{121}{18}$