

Durée : 2h. Documents et appareils électroniques interdits

Détailler raisonnablement les calculs et justifier chaque réponse

Q.1. On considère une expérience aléatoire pour laquelle on dispose d'un modèle (Ω, P) .

Quelle différence y a-t-il entre une issue de l'expérience et un évènement associé à l'expérience ?

A quoi correspond une issue dans le modèle (Ω, P) ? A quoi correspond un évènement dans ce même modèle ?

Q.2. L'expérience consiste à lancer une fois une pièce équilibrée dont on retient le résultat Pile ou Face.

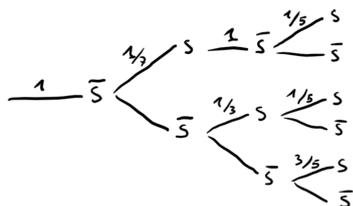
Quel est le modèle naturel pour cette expérience ? Quels sont (exhaustivement) les évènements associés à cette expérience ? Sont-ils tous équiprobables ?

Ex. 3. Une partie de la population est atteinte d'une maladie chronique qu'on soigne par la prise régulière d'un médicament. On sait que 10% de la population prend le médicament. On estime que 80% des personnes prenant le médicament sont atteintes par la maladie et que 20% des personnes malades ne prennent pas le médicament.

Quelle est la proportion de personnes malades dans la population ?

Ex. 4. Soit X une variable aléatoire de loi uniforme sur $\{-1, 0, 1\}$ et soit $Y = X^2$. Calculer la covariance de X avec Y . Qu'en déduit-on quant à l'indépendance de X avec Y ?

Ex. 5. Une expérience aléatoire est modélisée par l'arbre ci-dessous. S désigne un succès lors de l'étape correspondant à sa position, \bar{S} un échec.



A quoi correspond en terme de probabilité le nombre $\frac{1}{3}$ sur l'arrête $\bar{S} - S$ entre l'étape 2 et l'étape 3 ?

Quels nombres manquent sur les arrêtes sans étiquettes ?

Quelles sont (exhaustivement) les issues de l'expérience représentées dans l'arbre ?

Quelle est la loi du nombre de S obtenus lors de la réalisation de l'expérience ? Quelle est l'espérance de ce nombre ?

Ex. 6. Un garçon joue avec son petit frère au jeu suivant : il lance un dé. Si le dé affiche un nombre inférieur ou égal à 4 il donne ce nombre de bonbons à son frère. Sinon c'est son frère qui lui donne ce nombre de bonbons.

Quelle est la probabilité que le petit frère gagne des bonbons lors d'une partie ?

On note X_i le gain du grand frère en bonbons (positif ou négatif) lors de la i ème partie et $Y_n = (X_1 + \dots + X_n)/n$ le gain moyen après n parties. Calculer l'espérance et la variance de Y_n .

On note p_n la probabilité que le grand frère a gagné plus de bonbons qu'il n'en a perdu après n parties. Quelle est la limite de p_n quand n tend vers $+\infty$?

Ex. 7. Soient X et Y deux variables aléatoires indépendantes à valeurs dans $[0, +\infty[$ toutes deux de densité $x \mapsto 3e^{-3x}$ sur $[0, +\infty[$. On note Z la variable égale à la plus grande valeur entre X et Y à l'issue de l'expérience.

Calculer la fonction de répartition de Z . La variable Z admet-elle une densité ? Si oui laquelle ?

Que vaut l'espérance de Z ?