

Une expérience est dite aléatoire si son issue ne peut pas être déterminée a priori ; seul l'ensemble des issues possibles est connue. Un évènement est un énoncé portant sur l'issue dont on observe lors de la réalisation de l'expérience la valeur de vérité.

Un modèle pour une expérience aléatoire est un ensemble Ω (l'ensemble des issues possibles retenues de l'expérience) et une mesure de probabilité P_Ω (le plus souvent notée simplement P) de tous ou une partie des sous-ensembles de Ω tels que les évènements considérés correspondent chacun à un sous-ensemble de Ω (On dira que les évènements considérés sont représentables dans Ω).

Un modèle (Ω, P) est dit combinatoire si l'ensemble Ω est fini et si P est uniforme sur Ω auquel cas $P(E) = \frac{\#E}{\#\Omega}$. Il est dit discret si Ω est énumérable (*i.e.* fini ou en bijection avec l'ensemble des entiers) auquel cas $P(E) = \sum_{\omega \in E} P(\omega)$, non discret si $P(E) \neq \sum_{\omega \in E} P(\omega)$ en général.

Ex. 1. Donner la liste des sous-ensembles de $\{1, 2, 3\}$. Combien d'évènements peut on considérer si le modèle Ω est de cardinal 3 ?

Ex. 2. On lance deux dés et on considère l'évènement "La somme des dés vaut 6". Donner un modèle combinatoire de l'expérience avec une représentation de l'évènement. Quelle est la probabilité de l'évènement ?

Ex. 3. On choisit une famille comprenant deux enfants au hasard puis on choisit l'un des enfants de la famille au hasard. Donner un modèle combinatoire de l'expérience et une représentation de l'évènement "l'enfant choisi est un garçon" dans ce modèle. Quelle est la probabilité de cet évènement ?

On choisit à nouveau une famille au hasard et on considère l'évènement "l'un des enfants est un garçon". Donner un modèle combinatoire de l'expérience avec une représentation de l'évènement dans ce modèle. Quelle est la probabilité de l'évènement ?

Ex. 4. Une urne contient 10 boules rouges et 20 boules blanches.

a. On tire avec remise 10 boules dans l'urne et on considère l'évènement "les 10 boules tirées sont rouges". Donner un modèle combinatoire de l'expérience avec une représentation de l'évènement. Quel est sa probabilité ?

b. Mêmes questions si on procède à un tirage de 10 boules sans remise.

Ex. 5. (*Examen de décembre 2015*) Un tiroir contient 20 paires de chaussettes différentes (donc 40 chaussettes allant par paire) ; les chaussettes sont mélangées entre elles. On sort 20 chaussettes au hasard du tiroir et on note X le nombre de paires au complet parmi les 20 chaussettes sorties.

a. Si $X = 0$, combien de paires complètes reste t-il dans le tiroir ? Et si $X = 3$?

b. Proposer un modèle (Ω, P) pour l'expérience. A quelle partie de Ω correspond l'évènement $X = 0$? Quelle est sa probabilité ?

Ex. 6. On lance plusieurs fois une pièce de monnaie équilibrée jusqu'à ce que Face apparaisse et on s'intéresse au nombre de lancers pour y arriver. Y a t-il un modèle combinatoire de l'expérience ? Un modèle discret ? Un modèle autre ?

Soit $n > 0$ un entier. Donner un modèle combinatoire de l'expérience dans lequel l'évènement "F apparait après n lancers" est représentable. En déduire la probabilité de cet évènement puis un modèle discret (Ω, P) de l'expérience.

Questions de dénombrement

Ex. 7. Un directeur doit choisir un groupe de 4 personnes parmi 16 candidats (9 hommes et 7 femmes) pour une même tâche. Quel est le nombre de choix possibles ?

Quels est le nombre de choix si le directeur veut a) autant d'hommes que de femmes b) au moins un homme et au moins une femme ?

Ex. 8. Lors d'une conférence de l'ONU, des auditeurs de même nationalité s'assoient les uns à côté des autres; de combien de façon 3 français, 2 italiens, 6 américains et 2 chinois peuvent-ils prendre place sur une rangée de 13 sièges ?

Ex. 9. De combien de façon peut-on ranger p boules (indiscernables) dans n cases numérotées ? (Avec $p \leq n$.) Même question avec des boules numérotées.

Ex. 10. Quelle est la probabilité que le lancé de six dés donne six faces différentes ?

Ex. 11. Quelle est la probabilité que dans une classe de 30 élèves les anniversaires tombent sur 30 jours différents ?