Licence L2 MASS - Probabilité **feuille 2** **3 octobre 2016**

Révision évènements, probabilités, probabilités conditionnelles, interprétation probabiliste d'une fréquence.

Si E est un évt, sa négation est notée $\bar{E}$. La probabilité de E est notée $P(E)$. L'évt certain Ω est de probabilité 1 ; l'évt impossible $\emptyset = \bar{\Omega}$ est de proba 0.
Si E, F sont deux évts, $E \wedge F$ désigne l'évt "E et F" ; $E \vee F$ désigne l'évt "E ou F" (ou non exclusif).
E, F sont disjoints si $E \wedge F$ est impossible auquel cas $P(E \vee F) = P(E) + P(F)$. La suite $(F_1, \ldots, F_n)$ est une décomposition de l'évt E si F_i, F_j sont disjoints dès que $i \neq j$ et si $E = F_1 \vee F_2 \vee \ldots \vee F_n$.

Ex. 1. Soit E un évt. Observer que $(E, \bar{E})$ est une décomposition de l'évt certain. Quelle relation entre $P(E)$ et $P(\bar{E})$ obtient on ?

Ex. 2. Soient E, F deux évts. Observer que $(E \wedge F, E \wedge \bar{F})$ est une décomposition de E, que $(E \wedge F, E \wedge \bar{F}, \bar{E} \wedge F)$ est une décomposition de $E \vee F$ (faire un dessin). En déduite la relation entre $P(E), P(F), P(E \wedge F,), P(E \vee F)$.

Ex. 3. On observe dans une faculté célèbre que 3 étudiants sur 5 aiment les maths et que 3 étudiants sur 7 aiment le sport. Montrer que pour l'expérience consistant à sélectionner un étudiant au hasard, les évts "l'étudiant aime les maths" et "l'étudiant aime le sport" ne peuvent pas être disjoints.

Si E, F sont deux évts, la probabilité de E sachant F est notée $P(E|F)$ (parfois également $P_F(E)$). Elle est bien définie si $P(E)$, $P(F)$ sont bien définies et si $P(F) > 0$. Elle vérifie alors la relation fondamentale $P(E \wedge F) = P(E|F) \times P(F)$.
Combinée avec le fait que $(E \wedge F, E \wedge \bar{F})$ est une décomposition de E, on obtient le "calcul par conditionnement" ou "formule des probabilités totales" $P(E) = P(E|F) \times P(F) + P(E|\bar{F}) \times P(\bar{F})$. Plus généralement si $F_1, \ldots, F_n$ est une décomposition de l'évt certain alors on a $P(E) = \sum_i P(E|F_i) \times P(F_i)$.

Ex. 4. Quelle relation a t-on entre $P(E|F), P(F|E), P(E), P(F)$? Qu'appelle t-on Formule de Bayes ?

Ex. 5. Une compagnie d'assurance répartit ses assurés en trois catégories : conducteur à faible risque, conducteur à risque moyen et conducteur à haut risque. Les statistiques de la compagnie indiquent que la probabilité d'accident sur une période de un an est 0,05, 0,15 et 0,30 selon la catégorie. Par ailleurs, la répartition des assurés est la suivante : 20% sont à bas risque, 50% à risque moyen et 30% à haut risque. Un assuré est choisi au hasard : quelle est la probabilité qu'il ait un accident au cours de l'année ? Sachant que l'assuré n'a pas eu d'accident lors de l'année écoulée, quelle est la probabilité qu'il soit à faible risque ?

Ex. 6. *(traité en cours)* Un lot de 100 dés contient 25 dés pipés dont la probabilité de sortie du 6 est 1/2. Un dé est choisi au hasard et lancé : il donne 6. Quelle est la probabilité qu'il soit pipé ?

Ex. 7. On considère 3 urnes indiscernables. L'urne A contient 1 boule rouge et 2 noires, l'urne B contient 2 boules rouges et 6 blanches, et l'urne C contient 3 boules rouges et 7 blanches. Je choisis une urne au hasard sans savoir de laquelle il s'agit et dans cette urne je prends une boule au hasard. Elle est rouge. Quelle est la probabilité que je l'ai prise dans l'urne C ?

Ex. 8. Une maladie qu'on souhaite dépister touche 1% de la population. Un test est élaboré avec un taux de détection de 90% (90% des personnes malades auront un test positif) et un taux de faux positif de 10% (10% des personnes non malades auront un test positif). Une personne se fait tester et apprend que le test est positif ; quelle est la probabilité qu'elle soit malade ? Quelle est la probabilité qu'elle soit malade si elle apprend que le test est négatif ?

La notation $P_F(E)$ rappelle le fait que l'application $E \mapsto P(E|F)$ est une mesure de proba (pourvu que $P(F)$ soit strictement positif).

Ex. 9. Soient E, F, G trois évènements tels que $P(F \wedge G) > 0$. Expliquer la relation $P(E|G) = P(E|F \wedge G) \times P(F|G) + P(E|\bar{F} \wedge G) \times P(\bar{F}|G)$.

Ex. 10. *(traité en cours)* Le président d'une université américaine s'émeut de ce que le taux de réussite des filles au concours d'entrée soit significativement plus faible que celui des garçons : 35% contre 45%. Il interroge les directeurs des deux seuls départements de l'université, Sciences et Lettres, lesquels répondent qu'au concours d'entrée qu'ils organisent chacun pour leur département, les filles réussissent mieux que les garçons. Ainsi, d'après leurs statistiques, une fille se présentant au concours Sciences a 55% de chance d'être admise, contre 50% pour un garçon, et une fille se présentant au concours Lettres à 30% de chance d'être admise, contre 25% pour un garçon. Que doit conclure le président de l'université ? Indication : on suppose qu'un candidat ne se présente qu'à un seul des deux concours Sciences et Lettres. Noter p, respectivement q, la proportion parmi les filles, respectivement parmi les garçons, de choix du concours Sciences. Calculer p et q à partir des relations ci-dessus.

Ex. 11. On lit dans la presse la phrase suivante :

"Une personne de 40 ans et plus appartenant à un ménage modeste a 1.2 fois plus de risque qu'une personne de même classe d'âge n'appartenant pas à un ménage modeste de n'être pas vaccinée."

On note E l'évènement "Avoir 40 ans ou plus", F l'evt "appartenir à un ménage modeste", G l'evt "être vacciné". On note $\bar{E}$, $\bar{F}$, etc. la négation de l'evt E, de l'evt F, etc. respectivement.

Quelles sont les affirmations correctes parmi ce qui suit :

1. $\mathrm{P}(E \text{ et } F \,|\, G) = 1.2 \times \mathrm{P}(E \text{ et } F \mid \bar{G})$
2. $\mathrm{P}(F \,|\, E \text{ et } \bar{G}) = 1.2 \times \mathrm{P}(F \mid E \text{ et } G)$
3. $\mathrm{P}(G \,|E \text{ et } F) = 1.2 \times \mathrm{P}(\bar{G} \,|E \text{ et } F)$
4. $\mathrm{P}(\bar{G} \,|E \text{ et } F) = 1.2 \times \mathrm{P}(\bar{G} \,|E \text{ et } \bar{F})$
5. $\mathrm{P}(\bar{G} \,|E \text{ et } F) = 1.2 \times \mathrm{P}(\bar{G} \,|\overline{(E \text{ et } F)})$
6. La probabilité qu'un individu appartienne à un ménage modeste augmente si on apprend qu'il n'est pas vacciné.
7. La probabilité qu'un individu ne soit pas vacciné augmente si on apprend qu'il appartient à un ménage modeste.

Ex. 12. 30% de la population est atteint d'une maladie chronique qu'on soigne par la prise régulière d'un médicament. On estime que 75% des personnes atteinte de la maladie prennent le médicament et que 10% des personnes prenant le médicament ne sont pas malades (faux diagnostic), le médicament étant alors sans effet.

Quelle est la proportion des personnes prenant le médicament parmi les personnes non malades ?

On rencontre une personne au hasard. De combien augmente la probabilité a priori qu'elle soit malade si on apprend qu'elle prend le médicament ?

Un statisticien d'une compagnie d'assurance maladie est d'avis qu'il faut interdire le médicament sous prétexte que la prise de ce médicament augmente la probabilité d'être malade. Qu'en pensez vous ?

Ex. 13. *"Manger des brocolis diminue le risque d'anémie" (les données de l'exercice sont inventées)*

On observe que 10% des adolescents de plus de 14 ans sont atteints d'anémie et que 20% des adolescents atteints d'anémie déclarent manger régulièrement des brocolis. Un sondage auprès des adolescents de plus de 14 ans indique que 40% d'entre eux mangent régulièrement des brocolis.

a. On note A l'évènement "être atteint d'anémie" et M l'évènement "manger régulièrement des brocolis". Calculer les nombres $\frac{f_{A|M}}{f_A}$ et $\frac{f_{A|M}}{f_{A|\bar{M}}}$. Quelle population de référence choisira t-on pour affirmer de façon quantifiée que manger des brocolis diminue le risque d'anémie ? Quel sera le slogan précis ?

b. Que vaut l'affirmation (ou le slogan) ? Que peut on imaginer comme contexte qui retourne la conclusion ?

c. Un nouveau sondage indique que 15% des adolescents de plus de 14 ans mangent régulièrement des brocolis. Affirmera t on encore que manger des brocolis diminue le risque d'anémie ?