Licence L2 MASS - Probabilité feuille 2-bis 17 octobre 2016

Modèle d'une expérience aléatoire, indépendance : complément pour les feuilles 1 et 2

Deux évènements E, F sont indépendants si la probabilité de leur conjonction E et F est égale au produit de leurs probabilités. Si F est de probabilité non nulle, la condition d'indépendance équivaut à la condition $\mathrm{P}(E|F) = \mathrm{P}(E)$.
Deux expériences aléatoires sont indépendantes si tout évènement concernant l'une est indépendant de tout évènement concernant l'autre.
Supposons les expériences indépendantes et soient (Ω_1, P_1) et (Ω_2, P_2) des modèles respectifs de chacune des expériences ; alors on peut modéliser les deux expériences dans leur ensemble par le produit cartésien $\Omega_1 \times \Omega_2$ muni de la probabilité déterminée par $\mathrm{P}(A \times B) = \mathrm{P}_1(A)\mathrm{P}_2(B)$ pour tout $A \subset \Omega_1$ et $B \subset \Omega_2$. On appelle cette probabilité sur $\Omega_1 \times \Omega_2$ la probabilité produit. Attention : les parties de $\Omega_1 \times \Omega_2$ ne sont pas toutes de la forme $A \times B$.
Si (Ω_1, P_1) et (Ω_2, P_2) sont des modèles combinatoires, alors le modèle $\Omega_1 \times \Omega_2$ muni de la probabilité produit est également combinatoire.

Ex. 4-bis. On tire succéssivement 10 boules d'une urne contenant 10 boules rouges et 20 boules blanches. Quelle est la probabilité d'avoir tiré 7 boules rouges dans le cas où on tire avec remise puis dans le cas où on tire sans remise ?

On pourra proposer un modèle combinatoire ou former l'arbre binaire représentant les issues "la boule tirée est rouge" / "la boule tirée n'est pas rouge" des 10 tirages successifs.

Ex. 9-bis. a. On range p boules indiscernables dans n cases numérotées (au plus une boule par case), l'une des cases étant jaune (la case no 1 par exemple). Quelle est la probabilité que la case jaune contient une boule ?

Plusieurs modèles permettent de répondre à la question ; lesquels proposez vous ?

b. Parmi les p boules, k sont jaunes, les autres sont noires. Combien y a t-il de configuration des p boules dans les n cases si on tient compte de la couleur des boules ?

A l'issue du placement des boules, la case jaune contient une boule. Quelle est la probabilité qu'elle soit blanche ?

1. On tire 0 ou 1 (pile ou face) au hasard deux fois. On considère les évènements $E =$ "le 1er tirage donne 1", $F =$ "le 2ème tirage donne 1", $G =$ "la somme binaire des deux tirages vaut 1".

Montrer que E, F, G sont deux à deux indépendants mais que E n'est pas indépendant de la conjonction F et G.

2. On lance deux dés. On considère les évènements $E =$ "la somme des valeurs des dés vaut 6" et $F =$ "L'un des dés affiche une valeur impaire". Les évènements E et F sont ils indépendants ?

3. A partir de quel effectif n d'une classe la probabilité qu'au moins deux élèves de la classe aient leur anniversaire le même jour devient supérieure à $\frac{1}{2}$?