

Ex. 1 Dire lesquelles parmi les matrices suivantes sont régulières (Expliquer)

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Ex. 2 Chaque jour j'utilise comme moyen de transport soit le train soit la voiture, mais je ne prend jamais le train deux jours de suite. Par contre si j'ai utilisé la voiture la veille j'ai la même probabilité de prendre soit le train soit la voiture.

Ecrire la matrice de transition de ce processus de Markov.

* (Quelle est la probabilité que j'utilise le train le cinquième jour)
* facultatif

Ex. 3 M. érudite rédige ses devoirs le soir sept fois sur dix. Il ne travaille jamais deux soir de suite et s'il n'a pas travaillé un soir il a 60% de chance de ne pas travailler aussi le soir suivant.

À long terme quelle est la probabilité pour qu'il travaille le soir

Ex. 4 Nous avons deux boîtes A et B.

Dans la boîte A on y trouve deux boules blanches, dans la boîte B trois boules rouges.

On sort au hasard une boule de chaque boîte et on échange (i.e. on met dans la boîte B celle sortie de la boîte A ----)

(a) Trouver la matrice de transition de ce processus de Markov

(b) Quelle est la probabilité de trouver 2 boules rouges dans la boîte A, après 3 tirages?

(c) Quelle est, à long terme, la probabilité d'avoir deux boules rouges dans la boîte A?

Ex. 0 Trouver le vecteur fixe (vecteur probabilité) pour la matrice

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{6} & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} \\ 0 & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$$



Processus de Markov

Contrôle du 16 novembre 2007, durée de l'épreuve : 1h

I. (4 points) Soit $P = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1/2 & 1/2 \end{pmatrix}$ la matrice de transition d'un processus de Markov

et $p^{(0)} = (1/3, 2/3)$ la distribution de prob. initiale

Calculer : $p_{4,2}^{(3)}$; $p^{(3)}$ Facultatif : $p_2^{(3)}$

II. (4 points) Soit $u = (1/4, 0, 1/2, 1/4, 0)$ le vecteur fixe d'une matrice P stochastique.
La matrice P sera-t-elle régulière? Expliquer clairement.

III. (8 points) On lance une pièce de monnaie jusqu'à obtenir trois fois "face".
On note a_i l'état "avoir obtenu i faces"

(a) Ecrire la matrice de transition de ce processus.

(b) Cette matrice est-elle régulière? Expliquer votre réponse.

(c) Pourquoi la présence d'un état absorbant vous assure-t-elle que la matrice de transition n'est pas régulière?

IV. (6 points) Un joueur possède 2 euros.

Il paie 1 euro à la fois et gagne une fois sur deux.

Il arrête de jouer soit quand il n'a plus d'argent, soit quand il se retrouve avec 6 euros au poche.

Quelle est la probabilité pour qu'il puisse jouer au plus cinq fois avant de se retrouver sans argent?

Bonne chance!

- Si vous avez des difficultés avec un exercice, répondez à la question de cours suivante :

(6 points) Démontrer que si P est la matrice de transition d'un processus de Markov, alors $P^{(n)}$, la matrice de transition après n -étapes, n'est rien d'autre que la matrice P^n .

ou à la question que H. Dehon écrira au tableau.