Chaînes de Markov : mesure stationnaire et comportement asymptotique de la loi de X_n

(X_n) chaîne de Markov et ensemble d'états S (S est supposé fini). Pour $e, f \in S$ $\quad P_{e \to f}$ = probabilité de transition de l'état e à l'état f $= P(X_{n+1} = f \mid X_n = e)$

Chemin de e à f de longueur n = suite d'états $\omega(0) = e, \omega(1), \dots, \omega(n) = f$ telle que $P_{\omega(i) \to \omega(i+1)} > 0$ pour tout i
On note $\omega : e \rightsquigarrow f$, $|\omega| = n$

L'état e est transitoire s'il existe f, un chemin $e \rightsquigarrow f$ mais pas de chemin $f \rightsquigarrow e$. L'état e est dit récurrent s'il n'est pas transitoire. Si e est récurrent l'ensemble des f liés à e par un chemin $e \rightsquigarrow f$ est appelé composante irréductible de e notée C_e.
On a pour e, f récurrents $C_e = C_f$ ou $C_e \cap C_f = \emptyset$: les composantes irréductibles forment une partition de l'ens. des états récurrents.

Point de vue probabiliste : e est transitoire $\Leftrightarrow \forall f,\ P(X_n = e \mid X_0 = f) \to 0$ qd $n \to \infty$
e est récurrent $\Leftrightarrow$ conditionné à $X_0 = e$, l'ens. $\{n, X_n = e\}$ est infini avec proba 1
Pour e récurrent et partant de $X_0 = e$, (X_n) parcourt tous les états de C_e une infinité de fois avec proba 1

Point de vue matriciel : choisissons une numérotation $e(1), \dots, e(s)$ des états $\rightsquigarrow$ $P = \left(P_{e(j) \to e(i)}\right)_{i,j}$ matrice des proba de transition relativement à la numérotation $e(-)$.
$[\mu_n] = {}^t\left(P(X_n = e(1)), \dots, P(X_n = e(s))\right)$ vecteur colonne des coordonnées de la loi de X_n. On a $[\mu_n] = P^n [\mu_0]$

Il existe un chemin $\omega : e(i) \rightsquigarrow e(j)$ de longueur n $\Leftrightarrow (P^n)_{j,i} > 0$

Soit $C \subset \{1, \dots, s\}$ un ensemble d'indices des états. On dit que le vecteur $[\mu]$ est à support ds C si $[\mu]_i = 0$ dès que $i \notin C$
C est stable par P si $\forall [\mu]$ à support dans C, $P[\mu]$ est à support dans C
C est irréductible si C est stable par P et il n'existe pas C' strict inclus ds C et stable par P.
On a C est irréductible $\Leftrightarrow \forall i \in C$, $e(i)$ est récurrent et $\{e(i), i \in C\}$ est une composante irréductible de (X_n)

Effet d'une renumérotation de l'ens. des états : Soit $f(1), \dots, f(s)$ une autre numérotation de l'ens. des états. Il existe une bijection σ de $\{1, \dots, s\}$ dans lui même tq $\forall i\ f(i) = e(\sigma(i))$
Soit $Q = \left(P_{f(j) \to f(i)}\right)_{i,j}$ la matrice des proba de transition relativt à la numérotation $f(-)$. $Q_{i,j} = P_{\sigma(i),\sigma(j)}$

Plus généralt $(Q^n)_{i,j} = (P^n)_{\sigma(i),\sigma(j)}$ = probabilité d'aller de $f(j) = e(\sigma(j))$ à $f(i) = e(\sigma(i))$ en n étapes.

Le coeff. $(Q^n)_{i,j}$ admet une limite qd $n \to \infty \Leftrightarrow (P^n)_{\sigma(i),\sigma(j)}$ admet une limite qd $n \to \infty$.

On choisit une numérotation $e(-)$ telle que les numéros des états d'une même composante irréductible se suivent et telle que les états transitoires sont numérotés en dernier, alors P est de la forme

$$P = \begin{pmatrix} P_1 & & 0 & T_1 \\ & \ddots & & \vdots \\ 0 & & P_r & T_r \\ & & & T \end{pmatrix}$$ triangulaire supérieure par blocs, et $$P^n = \begin{pmatrix} P_1^n & & 0 & T_1^{(n)} \\ & \ddots & & \vdots \\ 0 & & P_r^n & T_r^{(n)} \\ & & & T^n \end{pmatrix}$$ avec la relation de récurrence $T_i^{(n+1)} = P_i T_i^{(n)} + T_i T^n$

P_i est la matrice des proba de transition de la composante irréductible C_i
T est la matrice $\left(P_{e(j) \to e(i)}\right)_{i,j}$ pour les i, j tq $e(i), e(j)$ sont transitoires. $\exists k$, $\forall e$ transitoire, $\exists f$ récurrent et $e \rightsquigarrow f$ chemin de longueur k. Alors T^k est une matrice strictement sous stochastique : chacune de ses colonnes est de somme < 1, en particulier il existe $\lambda > 1$ tq λT^k est encore sous stochastique. On en déduit $T^{kn} = O\left(\frac{1}{\lambda^n}\right) \underset{n \to \infty}{\longrightarrow} 0$

Mesure stationnaire : $[\mu]$ vecteur de proba (coord. ≥ 0 de somme 1) tq $P[\mu] = [\mu]$. Une matrice stochastique (chaque colonne de la matrice est un vecteur de proba) admet toujours au moins une mesure stationnaire.
Si $e(i)$ est transitoire et $[\mu]$ est stationnaire alors $[\mu]_i = 0$
Si $e(i)$ est récurrent et $[\mu]_i > 0$ alors $[\mu]_j > 0$ pour tout j tq $e(j) \in C_{e(i)}$
Il y a une seule composante irréductible $\Leftrightarrow$ il existe une seule mesure stationnaire.

Comportement asymptotique.

1) P, matrice des proba de transition relativement à une numérotation, est dite régulière s'il existe n_0 tq P^{n_0} est à coeff. >0

Caractérisation : P est régulière $\iff \begin{cases} \forall e, f \text{ états, il existe un chemin } e \to f \\ \text{et il existe } e \text{ état tq } \operatorname{pgcd}(|\omega|,\ \omega : e \to e) = 1 \end{cases}$ (tous les états sont récurrents et il y a une seule composante irréductible)

Thm de Perron-Frobenius : Si P est régulière alors P^n tend vers la matrice $([\mu] \cdots [\mu])$ où $[\mu]$ est l'unique vecteur de proba invariant par P (mesure stationnaire)

On observe $([\mu] - [\mu])[\mu_0] = [\mu]$ quel que soit le vecteur de proba $[\mu_0]$ donc si P est régulière, la loi de X_n tend vers la mesure stationnaire μ quelle que soit la loi de X_0 (mesure initiale μ_0)

Point de vue de l'algèbre matricielle : 1 est valeur propre de P de multiplicité 1 (l'espace propre E_1 est égal ~~à~~ au sous espace caractéristique E_1' et est de dimension 1)

Les autres valeurs propres de P sont toutes de module strict^t inférieur à 1

Soit $a = \max\{|\lambda|, \lambda \text{ valeur propre de } P, \lambda \neq 1\}$ alors $P^n - ([\mu] - [\mu]) = \underset{n\to\infty}{O}(a^n)$ (a^n fois une matrice dont les coeff. sont bornés comme fonction de n)

2) Cas où P est irréductible : pas d'état transitoire, une seule composante irréductible

Pour e état l'entier $d = \operatorname{pgcd}(|\omega|,\ \omega : e \to e)$ ne dépend pas de e

La chaîne $(X_{nd})_{n\in\mathbb{N}}$ a pour matrice de proba de transition P^d. Elle a d composantes irréductibles, toutes régulières.

Si la numérotation des états est adaptée à la décomposition en composantes irréductibles, la matrice P^d est diagonale par blocs

$P^d = \begin{pmatrix} P_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & P_d \end{pmatrix}$, chaque P_i est régulière donc P^{dn} tend vers $\begin{pmatrix} ([\mu_{(1)}] - [\mu_{(1)}]) & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & [\mu_{(d)}] \cdots [\mu_{(d)}] \end{pmatrix}$ où $[\mu_{(i)}]$ est l'unique mesure de proba invariante par P_i. Notons $P^{d\infty} = \begin{pmatrix} P_1^\infty & & \\ & \ddots & \\ & & P_d^\infty \end{pmatrix}$ cette limite

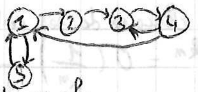
Pour tout entier $k \in \{1, \dots, d-1\}$, $P^{dn+k} = P^k P^{dn}$ tend vers $P^k P^{d\infty}$ qui dépend de k. Ainsi pour $n >> 0$, P^n est proche de $P^k P^{d\infty}$ où k est le reste de la division euclidienne de n par d

Si la numérotation des états n'est pas adaptée à la décomposition en composantes irréductibles de (X_{nd}), cela ne change pas la convergence de P^{dn}, seulement la forme de $P^{d\infty}$. On utilise une renumérotation pour décrire $P^{d\infty}$.

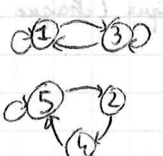
3) Cas général Notons $C_1, \dots, C_r$ les composantes irréductibles de (X_n), $d_1, \dots, d_r$ les pgcd des longueurs des chemins $e \to e$ associés à chacune des composantes irréductibles et soit $e = \operatorname{ppcm}(d_1, \dots, d_r)$

~~Pour~~ Si la numérotation des états est adaptée à la décomposition en composantes irréductibles, on a $P^{en} = \begin{pmatrix} P_1^{en} & & 0 & T_1^{(en)} \\ & \ddots & & \vdots \\ 0 & & P_r^{en} & T_r^{(en)} \\ & & & T^{en} \end{pmatrix}$

tend vers $\begin{pmatrix} P_1^{d_1\infty} & & 0 & T_1 ? \\ & \ddots & & \vdots \\ 0 & & P_r^{d_r\infty} & T_r ? \\ & & & 0 \end{pmatrix}$ noté $P^{e\infty}$; P^{en+k} tend vers $P^k P^{e\infty}$ qd $n \to +\infty$.

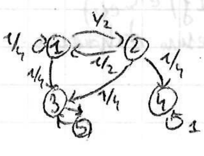
Exemple pour 2) : (X_n) de graphe 

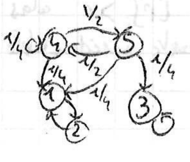
est irréductible ; $d = 2$, (X_{2d}) est de graphe



deux composantes irréductibles régulières non isomorphes

Après renumérotation des états on a $Q^{*} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \times & 1 \\ 0 & 0 & 1 & \times & 0 \\ \times & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ \times & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $Q^2 = \left(\begin{array}{cc|ccc} \times & \times & & 0 & \\ \times & \times & & & \\ \hline & & 0 & 0 & \times \\ 0 & & 1 & \times & 0 \\ & & 0 & \times & \times \end{array}\right)$

Exemple pour 3) (X_n) de graphe 

Après renumérotation :  $d_1 = 2$, $e = 2$