Le théorème ergodique pour les chaînes de Markov irréductibles

(X_n) irréductible (tous les états sont récurrents et reliés entre eux par un chemin). Soit e un état. On observe les passages de (X_n) en e sur l'intervalle de temps $\{1,\dots,n\}$. On a

$$\begin{cases} \frac{1}{n}\#\{k\le n, X_k=e\} \xrightarrow[n\to\infty]{} \rho(e) & \text{où } \rho \text{ est l'unique mesure de proba stationnaire pour } (X_n)\\ \text{le temps moyen de retour en e partant de e est } \frac{1}{\rho(e)} \end{cases}$$

Trajectoire issue d'un état transitoire (ou "transient")

e état transitoire, $X_0=e$. Avec proba 1 (X_n) atteint un état récurrent.

Expérience (E) : on observe une trajectoire de (X_n) partant de e jusqu'à ce que (X_n) atteigne un état récurrent. L'expérience se termine en un temps fini avec proba 1. On répète l'expérience (E) un grand nombre N de fois ; on observe à chaque fois l'état récurrent atteint par (X_n) ou la composante irréductible atteinte par (X_n). Soit $C_1,\dots,C_s$ les composantes irréductibles atteignables depuis e. On a

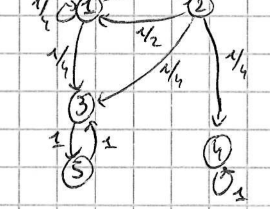
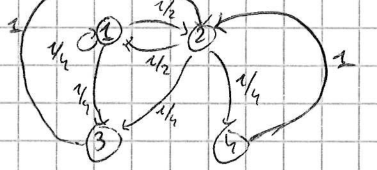
$$\frac{1}{N}\left(\text{nbre de fois que } (X_n) \text{ atteint } C_i \text{ à l'issue de l'expérience } (E)\right) \xrightarrow[N\to\infty]{} P(\exists n, X_n\in C_i \mid X_0=e)$$

Simulation de la répétition de (E) par une chaîne de Markov

On modifie les proba de transition comme suit : pour chaque état récurrent f atteignable depuis e sans passer par un état récurrent on pose $P_{f\to e}=1$, $P_{f\to g}=0$ pour tout $g\neq e$. On note (Y_n) la chaîne de Markov restreinte à la composante irréductible de e (e est désormais récurrent). Avec proba 1 une trajectoire de (Y_n) partant de $Y_0=e$ est une répétition infinie et de façon indépendante de l'expérience (E). On en déduit

$$\frac{\#\{k\le n, Y_k\in C_i\}}{\#\{k\le n, Y_k\in C_1\cup\dots\cup C_s\}} \xrightarrow[n\to\infty]{} P(\exists k, X_k\in C_i \mid X_0=e)$$

Le thm ergodique nous dit par ailleurs $\frac{\#\{k\le n, Y_k\in C_i\}}{\#\{k\le n, Y_k\in C_1\cup\dots\cup C_s\}} \xrightarrow[n\to\infty]{} \frac{\sum_{f\in C_i}\rho(f)}{\sum_{f\in C_1\cup\dots\cup C_s}\rho(f)}$ où ρ est l'unique mesure stationnaire pour (Y_n). On obtient $P(\exists n, X_n\in C_i \mid X_0=e) = \frac{\sum_{f\in C_i}\rho(f)}{\sum_{f\in C_1\cup\dots\cup C_s}\rho(f)}$

Ex (X_n) de graphe  e = 2 (Y_n) est de graphe 

Le calcul de ρ_Y donne $(\rho_Y(1),\rho_Y(2),\rho_Y(3),\rho_Y(4)) = \left(\frac{2}{7},\frac{3}{7},\frac{5}{28},\frac{3}{28}\right)$

$P((X_n)$ atteint la composante irr. de 3 $\mid X_0=2) = \frac{\rho_Y(3)}{\rho_Y(3)+\rho_Y(4)} = \frac{5}{8}$

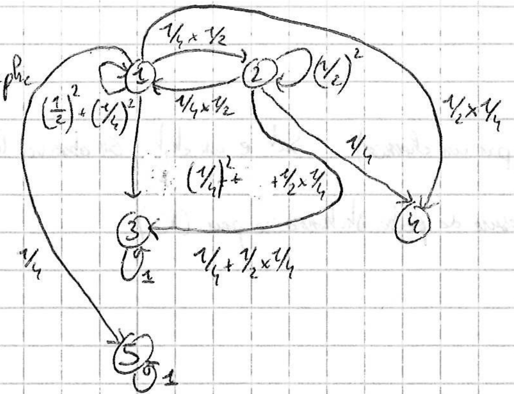
Loi limite de (X_n) partant d'un état transitoire e

On suppose que chaque composante irréductible de (X_n) est régulière (on s'y ramène en remplaçant (X_n) par (X_{en}) où l'entier e est décrit dans la section 3. Cas général. Soit f un état récurrent, ~~qu'il~~ atteignable depuis l'état e, C_i la composante irréductible contenant f, ρ_i la mesure stationnaire associée à C_i (celle dont le support est C_i), ou encore la mesure stationnaire de (X_n) restreinte à C_i. On a

$$\lim_{n\to\infty} P(X_n=f \mid X_0=e) = \lim_{n\to\infty} P(X_n=f \mid (X_k) \text{ atteint } C_i \text{ et } X_0=e)\; P((X_k) \text{ atteint } C_i \mid X_0=e) = \rho_i(f) \times P((X_k) \text{ atteint } C_i \mid X_0=e)$$

Ex Pour la chaîne (X_n) ci-dessus e = état 2, f = état 3. L'entier e (la notation e est surchargée) associé à (X_n) est 2

(X_{2n}) est de graphe



$$\lim_{n\to\infty} P(X_{2n}=5 \mid X_0=2) = 1 \times \frac{r_Y(5)}{r_Y(3)+r_Y(5)+r_Y(4)} = ?$$

$$\lim_{n\to+\infty} P(X_{2n+1}=5 \mid X_0=2) = \left(P\left[\left(\lim_{n\to+\infty} P(X_{2n}=i \mid X_0=2)\right)_{1\le i\le 5}\right]\right)_{5,2}$$ où P est la matrice des proba de transition de (X_n)

$$= ?$$