

---

# L2MASS - Calc. Sci. - Interrogation du 15 mai 2017

## Partie I.

On cherche l'équation de la droite passant par deux points  $M, N$  donnés par leurs coordonnées  $(x_M, y_M)$  et  $(x_N, y_N)$ . L'équation est de la forme  $ax + by + c = 0$  avec  $a, b, c$  non tous nuls. L'équation n'est pas unique (on devrait dire **une** équation) : si  $(a, b, c)$  convient alors  $(\alpha a, \alpha b, \alpha c)$  convient également pour tout  $\alpha \neq 0$ .

1. Que fait la suite d'instructions suivante ?

```
var('a b c')
f(x,y)=a*x+b*y+c
A=[2,1/2];B=[1/2,2];C=[1,1/2]
sol=solve([f(*P)==0 for P in [A,B]]+[[c==1]],[a,b,c]);sol
```

2. On définit la fonction  $g$  par l'instruction suivante :

```
g(x,y)=f(x,y).subs(sol[0])
```

Quel est l'ensemble des points  $(x, y)$  vérifiant  $g(C) * g(x, y) > 0$  ? Représenter ces points dans le domaine  $-2 < x < 2$  et  $-2 < y < 2$  avec la commande `region_plot` ?

3. Trouver "les" équations des droites  $(AB)$ ,  $(BC)$  et  $(AC)$ , écrire la liste des inégalités définissant l'intersection du triangle plein  $ABC$  avec le disque  $\{(x, y), x^2 + y^2 < 1\}$  puis dessiner cette intersection avec l'instruction `region_plot`

## Partie II

1. Que fait l'instruction suivante ?

```
-2+4*random()
```

2. On fixe le domaine  $D = \{(x, y), -2 < x < 2, -2 < y < 2\}$ . Ecrire une fonction prenant comme argument un entier  $n$  et rendant une liste de  $n$  points répartis suivant la loi uniforme sur  $D$  (c'est à dire telle que l'abscisse et l'ordonnée des points suivent la loi uniforme sur  $[-2, 2]$ ). Dessiner une telle liste de points dans le domaine  $D$ .

3. On donne une partie  $A$  de  $D$  par une fonction booléenne  $f : D \rightarrow \{True, False\}$ . Ecrire une fonction prenant comme argument la fonction  $f$  et une liste  $l$  de points de  $D$  et rendant la proportion d'éléments de  $l$  qui sont dans  $A$ . Tester cette fonction avec

```
f(x,y)=x<0
l=[[1,0],[-1,0]]
```

Vous pouvez prendre exemple sur les instructions suivantes

---

```
f(x,y)=x<0
print f(1), bool(f(1))
l=[[1,0],[-1,0],[-2,0]]
[bool(f(*A)) for A in l]
Integer(bool(f(-1,0)))
```

Si  $l$  est obtenue comme dans la question 1., vers quoi tend la proportion calculée lorsque  $n$  tend vers  $+\infty$  ?

4. On spécifie  $f(x, y) = "(x + y - 1/2)^2 + 4y^2 < 1"$  Pouvez vous écrire une suite d'instructions pour expérimenter la réponse à la question plus haut ? Pouvez vous faire un dessin ? Vous pouvez prendre exemple sur les instructions qui suivent :

```
f(x,y)=x<0
region_plot(f(x,y),(x,-2,2),(y,-2,2))
```

### Partie III

On pose

$$M = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ -\frac{1}{4} & -\frac{1}{2} & -\frac{9}{4} \\ \frac{1}{6} & \frac{2}{3} & 2 \end{pmatrix}$$

Vérifier que  $1/2$  est bien une valeur propre de  $M$ .

Trouver une base de l'espace propre pour la valeur propre  $1/2$

Pouvez vous dessiner cet espace propre en 3d ?

2. Vers quoi tend  $M^n$  quand  $n$  tend vers  $+\infty$  ? Pouvez vous expérimenter ce fait ?