
L2MASS - Calc. Sci. - Interrogation du 3 mai 2018

Partie I.

On cherche l'équation de la droite de \mathbb{R}^2 passant par deux points M, N donnés par leurs coordonnées (x, y) . L'équation est de la forme $ax + by + c = 0$ avec a, b, c non tous nuls. L'équation n'est pas unique (on devrait dire **une** équation) : si (a, b, c) convient alors $(\alpha a, \alpha b, \alpha c)$ convient également pour tout $\alpha \neq 0$.

1. Que fait la suite d'instructions suivante ?

```
var('a b c')
f(x,y)=a*x+b*y+c
A=[2,1/2];B=[1/2,2];C=[1,1/2]
sol=solve([f(*P)==0 for P in [A,B]]+[[c==1]],[a,b,c]);sol
```

2. On définit la fonction g par l'instruction suivante :

```
g(x,y)=f(x,y).subs(sol[0])
```

Quel est l'ensemble des points (x, y) vérifiant $g(*C) * g(x, y) > 0$? Représenter ces points dans le domaine $-2 \leq x \leq 2$ et $-2 \leq y \leq 2$ avec la commande `region_plot` ?

3. Trouver "les" équations des droites (AB) , (BC) et (AC) , écrire la liste des inégalités définissant l'intersection du triangle plein ABC avec le disque $\{(x, y), x^2 + y^2 < 9/4\}$ puis dessiner cette intersection avec l'instruction `region_plot`

Partie II.

1. Que fait l'instruction suivante ?

```
-2+4*random()
```

2. On fixe le domaine $D = \{(x, y), -2 \leq x \leq 2, -2 \leq y \leq 2\}$. Ecrire une fonction prenant comme argument un entier n et rendant une liste de n points répartis suivant la loi uniforme sur D (c'est à dire telle que l'abscisse et l'ordonnée des points suivent la loi uniforme sur $[-2, 2]$).

Dessiner une telle liste de points dans le domaine D .

3. On donne une partie A de D par une fonction booléenne $f : D \rightarrow \{True, False\}$.

Ecrire une fonction prenant comme argument la fonction f et une liste l de points de D et rendant la proportion d'éléments de l qui sont dans A .

Tester cette fonction avec

```
f(x,y)=x< 0
l=[[1,0],[-1,0]]
```

Vous pouvez prendre exemple sur les instructions suivantes

```
f(x,y)=x< 0
print f(1,0), bool(f(1,0))
```

```
l=[[1,0],[-1,0],[-2,0]]
[bool(f(*A)) for A in l]
Integer(bool(f(-1,0)))
```

Si l est obtenue comme dans la question 1., vers quoi tend la proportion calculée lorsque n tend vers $+\infty$?

4. On spécifie $f(x, y) = "(x + y - 1/2)^2 + 4y^2 < 1"$ Pouvez vous écrire une suite d'instructions pour expérimenter la réponse à la question plus haut ? Pouvez vous faire un dessin ? Vous pouvez prendre exemple sur les instructions qui suivent :

```
f(x,y)=x<0
region\_plot(f(x,y),(x,-2,2),(y,-2,2))
```

Partie III.

On pose

$$M = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ -\frac{1}{4} & -\frac{1}{2} & -\frac{9}{4} \\ \frac{1}{6} & \frac{2}{3} & 2 \end{pmatrix}$$

Vérifier que $1/2$ est bien une valeur propre de M .

Trouver une équation et une base de l'espace propre pour la valeur propre $1/2$

Pouvez vous dessiner cet espace propre en 3d ?

2. Vers quoi tend M^n quand n tend vers $+\infty$? Pouvez vous expérimenter ce fait ?