

L2MASS Calcul Sci. Interrogation 1 bis -- avr 2018

I.a Le calcul avec Sagemath de l'intégrale de 0 à $+\infty$ de $\frac{1}{\sqrt{1+x+x^2}}$ donne une erreur. Quelle est cette erreur ?

Donner une représentation graphique sur l'intervalle $[0, 10]$ de la primitive F de $x \mapsto \frac{1}{\sqrt{1+x+x^2}}$ s'annulant en 0.

Trouver un $b > 0$ tel que $F(b)$ est compris entre 10 et 11.

I.b On veut poser $f(a) = \int_0^\infty \frac{dx}{\sqrt{a+x^3}}$ mais Sagemath rend une erreur. Pourquoi ? Quelle suggestion du message d'erreur permet de définir f dans Sagemath ?

Trouver une expression de a tel que $f(a) = 1$.

Pour un tel a définir la fonction $g(t) = \int_0^t \frac{dx}{a+x^3}$. Vérifier qu'on a bien $g(0) = 0$. Comparer les valeurs rendues pour $g(\infty)$, $g(\infty)$. `simplify()`, `g(t)`. `limit(t = \infty)`. Que se passe-t-il ?

Trouver une valeur approchée (à 10^{-1} près) de $b > 0$ tel que $g(b) = \frac{1}{2}$

II On définit les deux suites (x_n) , (y_n) par les relations de récurrence :

$$x_0 = 1, \quad y_0 = 0, \quad x_{n+1} = \frac{x_n}{5} + \frac{2y_n}{3}, \quad y_{n+1} = \frac{4x_n}{5} + \frac{y_n}{3}$$

a. Calculer x_{20} par trois méthodes différentes.

Représenter graphiquement la suite des valeurs de x_n pour n variant de 0 à 20. Conjecturer vous une limite pour la suite (x_n) ?

b. Représenter graphiquement la suite de points (x_n, y_n, n) pour n variant de 0 à 20. Que voyez-vous ?

c. Trouver (x, y) tel que $x + y = 1$, $x = \frac{x}{5} + \frac{2y}{3}$, $y = \frac{4x}{5} + \frac{y}{3}$