

TP : L'algèbre linéaire en L2 avec Sagemath

Voici le sujet d'une interrogation d'algèbre linéaire en L2. L'objet du TP est de chercher les méthodes disponibles dans Sagemath pour y répondre.

1 Matrices et coordonnées

Calcullettes et documents interdits.

Exercice 1. Soient les vecteurs $v_1 = (1, 2, 1, 0)$, $v_2 = (1, 1, 0, -1)$, $v_3 = (1, 1, 1, 1)$. On pose $B = \{v_1, v_2, v_3\}$ et $V = \text{Vect}(B)$.

1. Montrer que la famille B est une base de V et déduire la dimension de V .
2. Soit le vecteur $v \in V$ défini par $[v]_B = (-2, 1, 3)$. Donner v .
3. Soit $\lambda \in \mathbb{R}$ et le vecteur $v_\lambda = (0, \lambda, -1, -3)$. Trouver tous les λ tels que $v_\lambda \in V$ et dans ce cas calculer les coordonnées de v_λ dans la base B .
4. Soit la matrice

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ -\frac{1}{2} & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

Donner la base \tilde{B} de V de sorte que $M_{\tilde{B}}^B = A$. Donner les coordonnées dans \tilde{B} du vecteur $v \in V$ par $[v]_B = (-2, 1, 3)$.

5. Soit l'application linéaire $f : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^2$ définie par $f(x, y, z, w) = (x - y + z, x + y + 2w)$. Montrer que $f(V) = \mathbb{R}^2$ et donner $M_C^B(f|_V)$ (la matrice de la restriction de f à V). Donner une base de $\ker(f|_V)$.

Documentation : voir les [tutoriels en français "algèbre linéaire"](https://www.google.com/search?q=sagemath+alg%C3%A8bre+lin%C3%A9aire) (<https://www.google.com/search?q=sagemath+alg%C3%A8bre+lin%C3%A9aire>) ou [en anglais](https://www.google.com/search?q=sagemath+linear+algebra) (<https://www.google.com/search?q=sagemath+linear+algebra>). On trouve en particulier une liste de méthodes disponibles dans le document [Sage Linear Algebra Quick Reference](https://wiki.sagemath.org/quickref) (<https://wiki.sagemath.org/quickref>) mais attention certains documents sont datés.

Voir aussi les

- TP [Algèbre matricielle avec Sagemath](https://math.unice.fr/~dehon/Ens/L2Mass-CalcSci/16-17/Shared%20-%202.sagews.html) (<https://math.unice.fr/~dehon/Ens/L2Mass-CalcSci/16-17/Shared%20-%202.sagews.html>).
- TP [L'examen de math3 avec Sagemath](https://share.cocalc.com/share/a56d8802-5740-429a-b5da-e7eb8dc5bb82/2017-18/tp-exam-math3.ipynb?viewer=share) (<https://share.cocalc.com/share/a56d8802-5740-429a-b5da-e7eb8dc5bb82/2017-18/tp-exam-math3.ipynb?viewer=share>)

1. Méthode très formelle

la notion de sous-espace vectoriel de \mathbb{R}^4 engendré par une liste de vecteur est implémentée dans Sagemath avec la fonction `span()` : entrer l'instruction `help(span)` ou bien entrer `span()`? puis appuyer sur la touche `\<TAB>`

Expérimentations :

In [4]:

```
span()?
```

```
-----  
-----  
TypeError                                 Traceback (most recent ca  
ll last)  
<ipython-input-4-8d3d4dbc5361> in <module>()  
----> 1 span()
```

TypeError: span() takes at least 1 argument (0 given)

In [42]:

```
v1=[1,2,1,0]  
w1=vector(w1)
```

In [43]:

```
print v1.count(1)  
print w1.base_ring()
```

```
2  
Integer Ring
```

In [44]:

```
print 1/2*w1
```

```
(1/2, 1, 1/2, 0)
```

In [45]:

```
print 1/2*v1
```

```
-----  
-----  
TypeError                                Traceback (most recent ca  
ll last)
```

```
<ipython-input-45-983463cf546a> in <module>()  
----> 1 print Integer(1)/Integer(2)*v1
```

```
/ext/sage/sage-8.6_1804/local/lib/python2.7/site-packages/sage/ring  
s/rational.pyx in sage.rings.rational.Rational.__mul__ (build/cytho  
nized/sage/rings/rational.c:20739)()  
 2407         return x
```

```
 2408
```

```
-> 2409         return coercion_model.bin_op(left, right, operator.  
mul)
```

```
 2410
```

```
 2411     cdef __mul__(self, right):
```

```
/ext/sage/sage-8.6_1804/local/lib/python2.7/site-packages/sage/stru  
cture/coerce.pyx in sage.structure.coerce.CoercionModel_cache_maps.  
bin_op (build/cythonized/sage/structure/coerce.c:11119)()  
 1203         mul_method = getattr(y, '__r%s__'%op_name, None  
)
```

```
 1204         if mul_method is not None:  
-> 1205             res = mul_method(x)
```

```
 1206             if res is not None and res is not NotImplemented:  
ented:
```

```
 1207                 return res
```

```
/ext/sage/sage-8.6_1804/local/lib/python2.7/site-packages/sage/ring  
s/rational.pyx in sage.rings.rational.Rational.__index__ (build/cyt  
honized/sage/rings/rational.c:6687)()  
 551         return int(self)
```

```
 552
```

```
--> 553         raise TypeError(f"unable to convert rational {self}  
to an integer")
```

```
 554
```

```
 555     cdef __set_value(self, x, unsigned int base):
```

```
TypeError: unable to convert rational 1/2 to an integer
```

In [46]:

```
V=span([w1])
```

In [47]:

```
w2=1/2*w1
```

```
print w2
```

```
W=span(ZZ, [w2])
```

```
(1/2, 1, 1/2, 0)
```

In [48]:

```
W.base_ring()
```

Out[48]:

Integer Ring

In [0]:

```
W.is_submodule()?
```

In [49]:

```
W.is_submodule(V)
```

Out[49]:

False

In [40]:

```
V=span(QQ, [w1])
W=span(QQ, [w2])
print W.is_submodule(V)
print V.is_submodule(W)
```

True

True

In [53]:

```
v2=[1,1,0,-1];v3=[1,1,1,1]
V=span(QQ, [v1,v2,v3])
```

In [54]:

```
v=V.from_vector(vector([-2,1,3]))
print v
```

(-2, 1, 3, 5)

In [55]:

```
v=-2*vector(v1)+vector(v2)+3*vector(v3)
print v
```

(2, 0, 1, 2)

In [0]:

```
V.from_vector()?
```

In [56]:

```
print V
```

Vector space of degree 4 and dimension 3 over Rational Field

Basis matrix:

```
[ 1  0  0  0]
[ 0  1  0 -1]
[ 0  0  1  2]
```

In [63]:

```
A=V.basis_matrix()
```

```
print A
```

```
[ 1  0  0  0]
[ 0  1  0 -1]
[ 0  0  1  2]
```

In [64]:

```
vector([-2,1,3])*A
```

Out[64]:

```
(-2, 1, 3, 5)
```

2. Méthodes matricielles

In [70]:

```
A=matrix([v1,v2,v3]).transpose();print A
```

```
[ 1  1  1]
[ 2  1  1]
[ 1  0  1]
[ 0 -1  1]
```