

**ANNEE UNIVERSITAIRE 2014-2015**

FILIERE : MASS

Année d'étude : L2

Probabilités

Durée : 2h

Nom de l'enseignant auteur du sujet : Julien Barré

Type d'épreuve : écrite

---

**SUJET**

*Documents interdits ; calculatrices autorisées.*

**Exercice 1** (3 points)

Un cueilleur de champignons récolte  $N$  champignons ;  $N$  est une variable aléatoire de loi de Poisson de paramètre 5. Chaque champignon a une probabilité  $2/3$  d'être comestible, et les comestibilités de champignons différents sont supposées indépendantes.

1. Rappeler ce qu'est une loi de Poisson de paramètre  $\lambda$ .
2. Quelle est la probabilité que la récolte comporte 2 champignons, dont un seul comestible ?
3. Quelle est la probabilité que la récolte ne comporte aucun champignon comestible ?

**Exercice 2** (5 points)

Richard et Roger jouent au tennis. Pour chaque partie, Richard a une chance sur 3 de gagner, et Roger 2 chances sur 3. On suppose que les résultats de parties différentes sont indépendants.

1. Dans cette question, Richard et Roger jouent 5 parties. On note  $V$  la variable aléatoire "nombre de victoires de Richard". Quelle est la loi de  $V$  ? Donner son espérance et sa variance. Que vaut  $\mathbb{P}(V \geq 3)$  ?
2. Dans cette question, Richard et Roger jouent un nombre indéterminé de parties, et s'arrêtent dès que Richard en gagne une. On note  $N$  la variable aléatoire "nombre de parties jouées". Quelle est la loi de  $N$  ? Donner son espérance et sa variance. Que vaut  $\mathbb{P}(N = 3)$  ?
3. Dans cette question, Richard et Roger jouent jusqu'à ce que l'un des deux ait gagné trois parties. Quelle est la probabilité que Richard gagne trois parties avant Roger ?

**Exercice 3** (3 points)

On considère 3 urnes indiscernables. L'urne A contient 1 boule rouge et 2 noires, l'urne B

contient 2 boules rouges et 6 blanches, et l'urne C contient 3 boules rouges et 7 blanches. Je choisis une urne au hasard, sans savoir de laquelle il s'agit (chaque urne a une chance sur 3 d'être choisie). Dans cette urne, je prends une boule au hasard (chaque boule de l'urne a la même probabilité d'être choisie). Elle est rouge. Quelle est la probabilité que je l'ai prise dans l'urne C ? Justifiez soigneusement votre raisonnement.

**Exercice 4** (5 points)

1. Rappeler les propriétés que doit vérifier la fonction de répartition d'une variable aléatoire absolument continue.

2. On considère la fonction suivante :

$$\begin{aligned} F(x) &= 0 & \text{si } x < -1 \\ F(x) &= 3c(x + 1) & \text{si } -1 \leq x < 0 \\ F(x) &= c(x + 3) & \text{si } 0 \leq x < 1 \\ F(x) &= 1 & \text{si } x \geq 1 \end{aligned}$$

Calculer  $c$  pour que  $F$  soit une fonction de répartition. Représenter graphiquement  $F$ . Dans la suite de l'exercice, on utilise cette valeur de  $c$ . *Si vous ne trouvez pas la valeur de  $c$ , donnez tout de même les formules utilisées dans la question suivante.*

3. Soit  $X$  une variable aléatoire de fonction de répartition  $F$ . Calculer  $\mathbb{P}(X \leq 0)$ ,  $\mathbb{E}(X)$  et  $\mathbb{V}(X)$ .

**Exercice 5** (4 points)

Soient  $X_1, \dots, X_{100}$  100 variables aléatoires indépendantes, toutes de même loi  $\mathcal{E}(2)$ .

1. Que vaut  $\mathbb{P}(X_1 \geq 1)$  ?

2. Que valent  $\mathbb{E}(X_1)$  et  $\mathbb{V}(X_1)$  ?

3. On note  $Y = (X_1 + \dots + X_{100})/100$ . Calculer approximativement  $\mathbb{P}(Y \geq 0.6)$ . Énoncez le théorème que vous utilisez et justifiez son utilisation.