

ANNEE UNIVERSITAIRE 2014-2015

FILIERE : MASS

Année d'étude : L2, 2e session

Probabilités

Durée : 2h

Nom de l'enseignant auteur du sujet : Julien Barré

Type d'épreuve : écrite

SUJET

Calculatrices autorisées, documents interdits, sauf les tables de la loi normale distribuées avec le sujet. Il est demandé de bien justifier les raisonnements.

Exercice 1 (4 points)

On considère dans cet exercice une urne qui contient autant de boules rouges que de boules blanches. On effectue tous les tirages avec remise. Si on effectue n tirages, on note A_n l'événement "On a tiré des boules des deux couleurs" et B_n l'événement "On a tiré au plus une boule rouge".

1. Dans cette question, on effectue 3 tirages. Calculer $\mathbb{P}(A_3)$, $\mathbb{P}(B_3)$, et $\mathbb{P}(A_3 \cap B_3)$. A_3 et B_3 sont-ils indépendants ?
2. Dans cette question, on effectue n tirages. Calculer $\mathbb{P}(A_n)$, $\mathbb{P}(B_n)$, et $\mathbb{P}(A_n \cap B_n)$. A_n et B_n sont-ils indépendants ?

Exercice 2 (5 points)

Une urne contient n boules blanches et une boule rouge.

1. Dans cette question, $n = 3$ et on tire successivement des boules dans l'urne **sans remise** ; on s'arrête lorsqu'on tire la boule rouge. On note F la variable aléatoire qui compte le nombre de tirages effectués. Déterminer la loi de F , puis son espérance et sa variance.
2. Dans cette question, n est quelconque et on tire successivement des boules dans l'urne **sans remise**, et on s'arrête lorsqu'on tire la boule rouge. On note F_n la variable aléatoire qui compte le nombre de tirages effectués. Déterminer la loi de F_n (justifiez votre réponse).
3. Dans cette question, n est quelconque et on tire successivement des boules dans l'urne **avec remise**, et on s'arrête lorsqu'on tire la boule rouge. On note G_n la variable aléatoire qui compte le nombre de tirages effectués. Quelle est la loi de G_n ? Que vaut l'espérance de G_n ?

Exercice 3 (3 points)

On suppose dans cet exercice que les sexes des différents enfants d'une même famille sont indépendants, et que la probabilité qu'un enfant soit un garçon est égale à 0.5. Un gouvernement (autoritaire et sexiste) impose la règle suivante : chaque famille ne peut avoir qu'un enfant, sauf si le premier est une fille. Dans ce cas, les parents sont autorisés, s'ils le souhaitent, à avoir un second enfant. L'opposition proteste, et avance l'argument que cette politique causera un déséquilibre entre le nombre de filles et de garçons dans le pays. Cet argument est-il valable ? Justifiez votre raisonnement.

Exercice 4 (4 points)

X suit une loi exponentielle $\mathcal{E}(1/2)$. On définit $Y = X^2$.

1. Donner les expressions de la densité de X , de la fonction de répartition de X et faire une représentation graphique de ces deux fonctions.
2. Que valent l'espérance et la variance de X ?
3. Calculer l'espérance de Y .
4. Donner l'expression de la densité de Y .

Exercice 5 (4 points)

Soient X_1, \dots, X_{200} 200 variables aléatoires indépendantes, toutes de même loi uniforme sur $[0, 2]$ (loi notée $\mathcal{U}_{[0,2]}$).

1. Que vaut $\mathbb{P}(X_1 \leq 0.8)$?
2. Que valent $\mathbb{E}(X_1)$ et $\mathbb{V}(X_1)$?
3. On note $Y = (X_1 + \dots + X_{200})/200$. Calculer approximativement $\mathbb{P}(Y \leq 0.8)$. Énoncez le théorème que vous utilisez et justifiez son utilisation.