Université de Nice - L2 - Probabilités - MASS

EXAMEN FINAL DU 19 DÉCEMBRE 2013.

DURÉE : 2H00. AUCUN DOCUMENT AUTORISÉ. CALCULATRICE INTERDITE.

La rédaction aura une part importante dans la notation.

1. Questions de Cours

(1) Démontrer l'inégalité de Markov : pour une variable aléatoire Y prenant un nombre fini de valeurs, toutes positives,

$$\forall a > 0, \quad \mathbb{P}\big(Y \geq a\big) \leq \frac{\mathbb{E}(Y)}{a}.$$

(2) Etant donnée une variable aléatoire X de loi de densité gaussienne $g : x \in \mathbb{R} \mapsto (2\pi)^{-1/2} \exp(-x^2/2)$, démontrer que

$$\mathbb{E}(X) = 0, \quad \mathbb{V}(X) = 1.$$

2. Exercice 1

Etant donnée une variable aléatoire U de loi de densité $g : x \in \mathbb{R} \mapsto \mathbf{1}_{[0,1]}(x)$ (i.e. de loi uniforme sur le segment sur $[0,1]$), on pose

$$X = -\ln(U).$$

(1) Calculer la fonction de répartition de U, notée $F : t \in \mathbb{R} \mapsto \mathbb{P}(U \leq t)$.

(2) En déduire la valeur de $\mathbb{P}(U \leq 0)$. En déduire qu'il est possible de calculer X, sauf peut-être pour quelques cas exceptionnels de probabilité nulle.

(3) Etant donnée un réel x, montrer que $X \leq x$ si et seulement si $U \geq \exp(-x)$.

(4) Montrer que la fonction de répartition de X, notée $G : x \in \mathbb{R} \mapsto \mathbb{P}(X \leq x)$, se met sous la forme

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad G(x) = \int_{-\infty}^{x} \mathbf{1}_{[0,+\infty)}(u) \exp(-u) du.$$

(5) Montrer que la loi de X admet une densité, que l'on précisera. Quelle est cette loi ?

3. Exercice 2

Dans cet exercice, on pourra utiliser les deux formules :

$$\sum_{i=1}^{N} = \frac{N(N+1)}{2}, \quad \sum_{i=1}^{N} i^2 = \frac{N(N+1)(2N+1)}{6}.$$

On se donne N variables aléatoires $X_1, \dots, X_N$ indépendantes telles que

$$\mathbb{P}(X_i = 1) = \frac{i}{N}, \quad \mathbb{P}(X_i = 0) = 1 - \frac{i}{N}, \quad \text{pour } i \in \{1, \dots, N\}.$$

(1) Calculer

$$\mathbb{P}\big(X_1 = 1 | X_1 + X_2 = 1\big).$$

(2) Montrer que

$$\mathbb{P}\big(X_1 = 1, \dots, X_{N-1} = 1\big) = \mathbb{P}\big(X_1 = 0, \dots, X_{N-1} = 0\big).$$

(3) En posant $S_N = X_1 + \cdots + X_N$, calculer $\mathbb{E}(S_N)$. En déduire la valeur de

$$\lim_{N \to +\infty} \mathbb{E}\big(\frac{S_N}{N}\big).$$

(4) Calculer $\mathbb{V}(S_N)$. En déduire que

$$\lim_{N \to +\infty} \mathbb{V}\big(\frac{S_N}{N}\big) = 0.$$

(5) Rappeler l'inégalité de Bienaymé-Chebychev. En déduire

$$\forall a > 0, \quad \lim_{N \to +\infty} \mathbb{P}\Big(\big|\frac{S_N}{N} - \frac{N+1}{2N}\big| > a\Big) = 0.$$