Université de Nice - L2MASS - Probabilités

EXAMEN PARTIEL DU 14 NOVEMBRE 2013.

DURÉE : 1H30. AUCUN DOCUMENT AUTORISÉ. CALCULATRICE INTERDITE.

1. Question de Cours (Environ 4 points)

Enoncer et démontrer la formule de Bayes.

2. Exercice 1 (Environ 8 ou 9 points)

Dans une urne sont diposées R_0 boules rouges et N_0 boules noires.

(1) Une boule est tirée au hasard : elle y est alors replacée ; en supplément, c boules de la même couleur que celle tirée sont ajoutées dans l'urne. On désigne par R_1 et N_1 les nombres de boules rouges et noires dans l'urne après l'opération.

Montrer que

$$\mathbb{P}\{N_1 = N_0 + c\} = \frac{N_0}{N_0 + R_0},\ \mathbb{P}\{R_1 = R_0 + c\} = \frac{R_0}{N_0 + R_0}.$$

Calculer le nouveau nombre de boules dans l'urne après l'opération.

(2) A l'issue de la première opération, l'expérience est poursuivie avec la même règle : une boule est tirée avant d'être replacée ; c boules de la même couleur sont alors ajoutées dans l'urne. On désigne alors par R_2 et N_2 les nombres de boules rouges et noires dans l'urne après la deuxième opération.

Quelles sont les valeurs possibles pour N_2 ?

(3) Calculer

$$\begin{aligned}
&\mathbb{P}\{N_2 = N_0 + 2c | N_1 = N_0 + c\},\\
&\mathbb{P}\{N_2 = N_0 + c | N_1 = N_0\},\\
&\mathbb{P}\{N_2 = N_0 + c | N_1 = N_0 + c\},\\
&\mathbb{P}\{N_2 = N_0 | N_1 = N_0\}.
\end{aligned}$$

(4) En déduire la loi de N_2.

(5) Calculer $\mathbb{P}\{N_1 = N_0 + c | N_2 = N_0 + c\}$.

Exercice 2 (Environ 7 ou 8 points)

A la caisse d'un grand magasin, le nombre de produits achetés par un client est assimilé à une variable aléatoire X de loi de Poisson de paramètre λ, i.e.

$$\mathbb{P}\{X = k\} = \frac{\lambda^k}{k!}\exp(-\lambda), \quad k \in \mathbb{N}.$$

(1) Deux clients se présentent successivement à la caisse. Le nombre d'articles achetés par le premier est modélisé par une variable aléatoire X_1 de loi de Poisson de paramètre λ et le nombre d'articles achetés par le second est modélisé par une variable aléatoire X_2, également de loi de Poisson de paramètre λ, et indépendante de X_1.

Calculer la probabilité $\mathbb{P}\{X_1 = 1, X_2 = 2\}$.

(2) Etant donné un entier $k \geq 0$, trouver trois entiers i_1, i_2 et i_3 tels que

$$\mathbb{P}\{X_1 + X_2 = k\} = \sum_{\ell=i_1}^{i_2} \mathbb{P}\{X_1 = \ell, X_2 = i_3 - \ell\}.$$

(3) Montrer que la somme $X_1 + X_2$ suit une loi de Poisson de paramètre 2λ.

(4) Dans cette question, on suppose que l'on observe le nombre total d'articles achetés par les deux clients. Pour $n \geq 0$ fixé, et pour $k \geq 0$, montrer que la probabilité conditionnelle $\mathbb{P}\{X_1 = k | X_1 + X_2 = n\}$ est égale à

$$\mathbb{P}\{X_1 = k | X_1 + X_2 = n\} = \begin{cases} C_n^k \dfrac{1}{2^n}, & k \in \{0, \dots, n\} \\ 0, & k > n. \end{cases}$$

Quelle loi peut-on reconnaître ?